



John Quincy Adams.



EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBRI PRIORES SEX,

ITEM

UNDECIMUS ET DUODECIMUS,

EX VERSIONE LATINA

FEDERICI COMMANDINI;

Sublatis iis quibus olim Libri hi a THEONE, aliisve, Vitiati sunt,
Et quibusdam EUCLIDIS Demonstrationibus Restitutis,

A ROBERTO SIMSON, M.D.
In Academia Glasguensi Matheseos Professore.

GLASGUAE,
IN AEDIBUS ACADEMICIS
EXCUDEBANT ROBERTUS ET ANDREAS FOULIS
ACADEMIAE TYPOGRAPHI
M.DCC.LVI.

GEORGIO,

WALLIAE PRINCIPI,

CUI MULTUM JAM DEBENT,

PLURIMUM OLIM DEBEBUNT,

BONAE ARTES ET SCIENTIAE,

HOSCE

ELEMENTORUM EUCLIDIS

PRAECIPUOS LIBROS,

BENEVOLO SUO PERMISSU,

EA, QUA PAR EST,

ANIMI GRATI VENERATIONE,

PRINCIPI JUVENTUTIS

D. D. C. Q.

ROBERTUS SIMSON.

P R A E F A T I O.

DE auctore Geometriae Elementorum, quae Euclidis nomine inſigniuntur, variae admodum ſunt Recentiorum ſententiae, quae non paullum inter ſe diſcrepant; etenim Petrus Ramus tam Propoſitiones quam earundem Demonſtrationes Theoni adſcribit; alii Propoſitiones Euclidi, Demonſtrationes vero Theoni tribuunt; alii denique, inter quos in primis nominandi ſunt viri doctiſſimi Joannes Buteo et Henricus Savilius, Propoſitiones et Demonſtrationes omnes Euclidis eſſe ſtrenue contendunt. inter has veriſimilior viſa eſt Buteonis et Savilii ſententia, quam proinde plerique poſt eos Geometrae amplexi ſunt. Savilius, poſt adducta quaedam in hanc rem argumenta, ex illis concludit, "Theonis "fuiſſe partes, in Euclide pauciſſimis quidem in locis interpolando, ex- "plicando, augendo, ultra hoc nullas." verum ſaepius perpendendo atque inter ſe comparando Demonſtrationes quae in Euclide nunc exſtant, inveni Theonem, vel quicunque Editor fuit textus Graeci quem nunc habemus, multo plura, et quidem in pejus, mutaſſe quam praedicti viri docti, aliique exiſtimant; addendo ſcilicet, demendo, aut ſua miſcendo; praeſertim in Libro quinto et undecimo quos iſte Editor non leviter vitiavit. Ex. gr. ſubſtituendo breviorem, at paralogiſticam, vice legitimae Demonſtrationis Propoſitionis 18^{vae} Libri 5^{ti}; et ex hoc Libro, auferendo, inter alia, bonam Euclidis vel Eudoxi rationis compoſitae Definitionem, cujus loco poſuit Definitionem abſurdam, 5^{tam} ſc. Libri 6^{ti}, quâ neque Euclides, neque Archimedes, Apollonius aut ullus ante Theonem Geometra uſus fuit, cujuſque apud illos nullum veſtigium invenitur. hanc autem Theonis Definitionem, quae ſola multum negotii Tyronibus faceſſere ſolet, ex hiſce Elementis nunc ſublata eſt, atque ejus loco alia, quam ſine dubio Euclides dederat, poſita eſt

inter

inter Definitiones Libri 5^{ti}, ex qua doctrina de Ratione Compoſita facilis redditur. Praeterea inter Definitiones Libri 11^{mi} habetur haec quae 10ma eſt, "Aequales et ſimiles ſolidae figurae ſunt, quae ſimili-" "bus planis multitudine et magnitudine aequalibus continentur;" eſt vero Propoſitio haec Theorema, non Definitio, quoniam aequalitas figurarum quarumcunque demonſtranda eſt, non vero aſſumenda. quamvis igitur vera fuiſſet, demonſtrari debuit haec Propoſitio; non autem ſemper vera eſt extra caſum in quo figurarum anguli ſolidi non pluribus tribus angulis planis continentur, in aliis enim caſibus, duae figurae ſolidae poſſunt contineri planis ſimilibus, multitudine et magnitudine aequalibus, et tamen inter ſe inaequales eſſe, ut in Notis, hiſce Elementis annexis, perſpicue oſtendetur. ſimiliter, in Demonſtratione Propoſitionis 26^{tae} Libri 11^{mi}, aſſumitur duos angulos ſolidos inter ſe aequales eſſe, ſi angulis planis multitudine et magnitudine aequalibus contineantur; ſed neque hoc ſemper verum eſt extra caſum in quo anguli ſolidi non pluribus tribus angulis planis continentur, cujus tamen caſus nulla, quamvis omnino ſit neceſſaria, in Elementis Demonſtratio hactenus habetur. Ex Definitione autem 10ma pendent Propoſitiones 25ta et 28va Libri 11^{mi}, et ex Propoſitione 25ta vel 26ta pendent octo aliae, viz. Propp. 27ma, 31ma, 32da, 33^{tia}, 34ta, 36ta, 37ma, 40ma Libri ejuſdem; et 12ma Libri 12^{mi} pendet ex 8va ejuſdem, eademque 8va, Corollarium 17^{mae}, et Prop. 18va Libri 12^{mi} pendent ex Definitione 9na Libri 11^{mi}; quae minime proba eſt, quoniam poſſunt eſſe figurae ſolidae contentae planis ſimilibus, multitudine aequalibus, quae tamen minime ſunt ſimiles. omnes igitur hae Propoſitiones infirmo hactenus innitebantur fundamento. Alia etiam ſunt, non pauca, quae minime videntur Euclidis eſſe, et quae ſatis oſtendunt Elementa ejus a Geometriae imperitis non leviter eſſe corrupta; et quidem quamvis haec non aeque craſſa ſint ac praedicta errata, ſunt tamen neceſ-

ſario

ſario corrigenda. quorum omnium ratio in Notis ad finem Libri reddetur.

Operae igitur pretium videbatur, neque ingratum fore putabam viris eruditis, praeſertim iis qui accuratis demonſtrationibus in Geometria delectantur, hoſce Elementorum Euclidis praecipuos Libros ab hiſce naevis vindicare, et ad priſtinam *ἀκρίβειαν* reſtituere, quantum ſc. ingenium valebat; praeſertim cum fundamentum ſint ſcientiae quae magnam in multis rebus utilitatem adfert, quin et aliis quibuſdam ſcientiis, et pleriſque omnibus pacis et belli artibus eſt neceſſaria, cujuſque ope veri inquiſitio et inveſtigatio, quantum ſinit mentis humanae imbecillitas, promovetur. atque hoc facere conati ſumus, tollendo falſa minimeque accurata quae pro veris et germanis accuratiſſimi Geometrae ſcriptis ſuppoſuerunt imperiti Editores, et Euclidi reſtituendo, a Theone aliiſve, ab eo ſurrepta, quae per multa ſaecula hactenus ſepulta jacuerunt.

EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER PRIMUS.

DEFINITIONES.

I.

PUNCTUM, ſeu ſignum, eſt, cujus nulla eſt pars, vel quod magnitudinem nullam habet.

II.

Linea vero eſt longitudo latitudinis expers.

III.

Lineae extrema ſunt puncta.

IV.

Recta linea eſt, quae ex aequo ſuis interjicitur punctis.

V.

Superficies eſt id, quod longitudinem, et latitudinem tantum habet.

VI.

Superficiei extrema ſunt lineae.

VII.

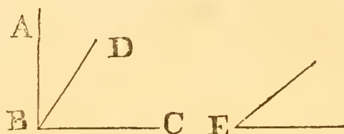
Plana ſuperficies eſt, in qua ſumptis utcunque duobus punctis, recta linea inter ea, tota jacet in illa ſuperficie.

VIII.

" Planus angulus eſt duarum linearum in plano ſeſe tangentium, et non " in directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio."

IX.

Angulus planus rectilineus eſt duarum rectarum ſeſe tangentium, et non in directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio.



' N. B. Si plures anguli ad unum punctum B exiſtant, quilibet eorum ' deſignatur tribus alphabeti literis, quarum ea quae eſt ad verticem an- ' guli, hoc eſt ad punctum in quo rectae angulum continentes ſibi mu- ' tuo occurrunt, in medio reliquarum ponitur; harum autem una eſt ' alicubi ad unam ex rectis illis, altera ad alteram. ita angulus qui rectis ' AB, CB continetur, deſignatur literis ABC, vel CBA; qui vero rectis ' AB, DB continetur, literis ABD, vel DBA; et qui rectis DB, CB ' continetur, literis DBC, vel CBD deſignatur. ſi autem unus tantum ' angulus ad punctum exiſtat, deſignari poteſt literâ ad punctum illud ' poſita, ut angulus ad E.'

X.

Cum vero recta linea ſuper rectâ linea inſiſtens, eos, qui deinceps ſunt angulos, aequales inter ſe fecerit, rectus eſt uterque aequalium angulorum; et quae inſiſtit recta linea, perpendicularis vocatur ad eam cui inſiſtit.



XI.

Obtuſus angulus eſt, qui major eſt recto.

Acutus



XII.

Acutus autem, qui minor eſt recto.

XIII.

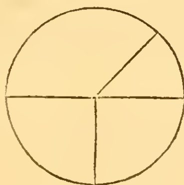
" Terminus eſt, quod alicujus eſt extremum."

XIV.

Figura eſt, quae aliquo, vel aliquibus terminis continetur.

XV.

Circulus eſt figura plana, una linea contenta, quae circumferentia appellatur; ad quam ab uno puncto intra figuram exiſtente omnes rectae lineae pertingentes ſunt aequales.



XVI.

Hoc autem punctum, centrum circuli nuncupatur.

XVII.

Diameter circuli eſt recta quaedam linea per centrum ducta, et ex utraque parte circumferentiâ circuli terminata.

XVIII.

Semicirculus eſt figura quae continetur diametro et circumferentiâ circuli quae a diametro intercipitur.

XIX.

" Segmentum circuli eſt figura quae rectâ linea et circuli circumferen-
" tiâ continetur."

XX.

Rectilineae figurae ſunt, quae rectis continentur lineis.

XXI.

Trilaterae quidem, quae tribus.

XXII.

Quadrilaterae, quae quatuor.

XXIII.

Multilaterae vero, quae pluribus quam quatuor rectis lineis continentur.

XXIV.

Trilaterarum figurarum, aequilaterum eſt triangulum, quod tria latera habet aequalia.

XXV.

Iſoſceles, quod duo tantum aequalia latera habet.



XXVI.

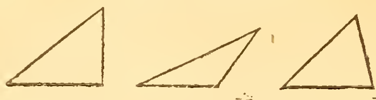
Scalenum vero, quod tria inaequalia habet latera.

XXVII.

Ad haec, trilaterarum figurarum, rectangulum quidem triangulum eſt, quod rectum angulum habet.

XXVIII.

Obtuſangulum eſt, quod obtuſum habet angulum.



Acutangulum

XXIX.

Acutangulum vero, quod tres acutos angulos habet.

XXX.

Quadrilaterarum figurarum, quadratum eſt, quod et aequilaterum eſt et rectangulum.



XXXI.

Altera parte longior figura eſt, quae rectangula quidem aequilatera vero non eſt.

XXXII.

Rhombus, quae aequilatera quidem, ſed rectangula non eſt.



XXXIII.

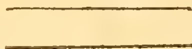
Rhomboides, quae oppoſita latera inter ſe aequalia habens, neque aequilatera eſt, neque rectangula.

XXXIV.

Praeter has autem reliquae quadrilaterae figurae trapezia vocentur.

XXXV.

Parallelae, ſeu aequidiſtantes rectae lineae ſunt, quae cum in eodem ſint plano, et ex utraque parte in infinitum producantur, in neutram partem inter ſe conveniunt.



POSTU-

POSTULATA.

I.

POSTULETUR, a quovis puncto ad quodvis punctum rectam lineam ducere.

II.

Et rectam lineam terminatam, in continuum et directum producere.

III.

Et quovis centro et intervallo circulum deſcribere.

AXIOMATA.

I.

QUAE eidem aequalia, et inter ſe ſunt aequalia.

II.

Et ſi aequalibus aequalia adjiciantur, tota ſunt aequalia.

III.

Et ſi ab aequalibus aequalia auferantur, reliqua ſunt ~~in~~aequalia.

IV.

Et ſi inaequalibus aequalia adjiciantur, tota ſunt inaequalia.

V.

Et ſi ab inaequalibus aequalia auferantur, reliqua ſunt inaequalia.

VI.

Et quae ejuſdem ſunt duplicia, inter ſe ſunt aequalia.

VII.

Et quae ejuſdem ſunt dimidia, inter ſe ſunt aequalia.

VIII.

Et quae ſibi mutuo congruunt, inter ſe ſunt aequalia.

IX.

Totum eſt ſua parte majus.

X.

Duae rectae lineae ſpatium non comprehendunt.

XI.

Omnes anguli recti inter ſe aequales ſunt.

XII.

" Et ſi in duas rectas lineas recta linea incidens, interiores et ad eaſ-
" dem partes angulos duobus rectis minores fecerit, duae illae rectae
" lineae in infinitum productae, inter ſe convenient ex ea parte ad
" quam ſunt anguli duobus rectis minores. Vid. notas ad Prop. 29.
" Lib. I."

PRO-

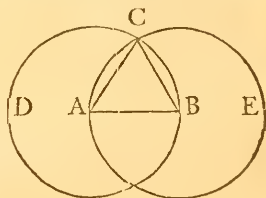
PROPOSITIO I. PROBLEMA.

SUPER data rectâ lineâ terminatâ triangulum aequilaterum conſtituere.

Sit data recta linea terminata AB, oportet vero ſuper rectâ AB triangulum aequilaterum conſtituere.

a. 3. Poſtulatum. Centro quidem A intervallo autem AB circulus deſcribatur [a] BCD; et rurſus centro B, intervallo BA deſcribatur circulus ACE; et a puncto C, in quo circuli ſe invicem ſecant ad puncta A, B ducantur [b] rectae CA, CB. erit ABC triangulum aequilaterum.

b. 2. Poſt.



Quoniam igitur punctum A centrum eſt circuli BCD, erit AC ipſi AB aequalis [c]; rurſus quoniam punctum B centrum eſt circuli CAE, erit BC aequalis rectae BA. oſtenſa autem eſt recta CA aequalis ipſi AB; utraque igitur ipſarum CA, CB, ipſi AB eſt aequalis. quae autem eidem ſunt aequalia, et inter ſe aequalia ſunt [d]; recta igitur CA ipſi CB eſt aequalis. tres igitur CA, AB, BC inter ſe ſunt aequales. aequilaterum propterea eſt triangulum ABC, et conſtitutum eſt ſuper datâ recta linea terminata AB. Quod erat faciendum.

c. 15. Definit.

d. 1. Axioma.

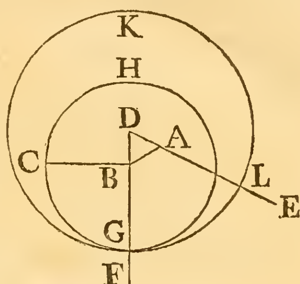
PROP. II. PROB.

AD datum punctum, datae rectae lineae aequalem rectam lineam ponere.

Sit datum quidem punctum A, data vero recta linea BC; oportet ad punctum A, rectae BC aequalem rectam lineam ponere.

Ducatur

Ducatur a puncto A ad B recta linea AB[a], et ſuper ipsâ conſtitua- a. Poſt. 1.
tur triangulum aequilaterum DAB[b]; et producantur in directum ipſis b. 1. 1.
DA, DB rectae lineae AE, BF[c], centroque B, intervallo autem BC, c. Poſt. 2.
circulus CGH deſcribatur[d]. et rurſus centro D, intervallo DG deſcribatur circulus GKL. d. Poſt. 3.



Quoniam igitur punctum B centrum eſt CGH circuli, erit BC ipſi BG aequalis[e]. et rurſus quoniam D centrum eſt circuli GKL, erit DL aequalis DG, quarum DA eſt aequalis DB; reliqua igitur AL reliquae BG eſt aequalis[f]. oſtenſa autem eſt BC aequalis ipſi BG. quare utraque ipſarum AL, BC eſt aequalis rectae BG. quae autem eidem aequalia, et inter ſe ſunt aequalia. ergo et recta AL aequalis eſt ipſi BC. Ad datum igitur punctum A datae rectae lineae BC aequalis poſita eſt AL. Quod facere oportebat.

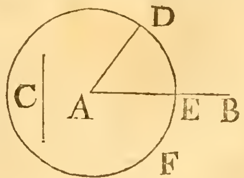
e. Def. 15.

f. Ax. 3.

PROP. III. PROB.

DATIS duabus rectis lineis inaequalibus, a majore minori aequalem abſcindere.

Sint duae datae rectae inaequales AB et C, quarum major ſit AB; oportet a majore AB minori C aequalem rectam lineam abſcindere.



Ponatur ad punctum A ipſi C aequalis recta linea AD[a]; et centro quidem A, intervallo autem AD deſcribatur circulus DEF[b]. et quoniam A centrum eſt DEF

a. 2. 1.

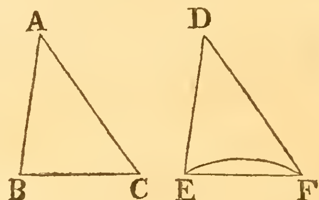
b. Poſt. 3.

circuli, erit AE ipſi AD aequalis. ſed et recta C aequalis eſt ipſi AD; utraque igitur ipſarum AE, C ipſi AD aequalis erit. quare et recta AE c. Ax. 1. ipſi C eſt aequalis[c]. Duabus igitur datis rectis lineis inaequalibus AB et C, a majore AB minori C aequalis abſciſſa eſt. Quod erat faciendum.

PROP. IV. THEOREMA.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus aequalia habeant, alterum alteri; habeant autem et angulum angulo aequalem, qui aequalibus rectis lineis continetur: et baſim baſi aequalem habebunt; et triangulum triangulo aequale erit; et reliqui anguli reliquis angulis aequales, alter alteri, quibus aequalia latera ſubtenduntur.

Sint duo triangula ABC, DEF, quae duo latera AB, AC duobus lateribus DE, DF aequalia habeant, alterum alteri, videlicet latus quidem AB lateri DE aequale, latus vero AC ipſi DF; et angulum BAC angulo EDF aequalem. dico, et baſim BC baſi EF aequalem eſſe, et triangulum ABC aequale triangulo DEF; et reliquos angulos reliquis angulis aequales, alterum alteri, quibus aequalia latera ſubtenduntur; nempe angulum ABC angulo DEF, et angulum ACB angulo DFE.



Triangulo enim ABC applicato ipſi DEF, et puncto quidem A poſito in D, recta vero linea AB in ipſa DE; congruet et punctum B puncto E, quod AB ipſi DE ſit aequalis. congruente autem AB ipſi DE, congruet et AC recta linea rectae lineae DF, quia BAC angulus aequalis eſt angulo EDF. quare et punctum C congruet puncto F, quia recta AC eſt aequalis rectae lineae DF.

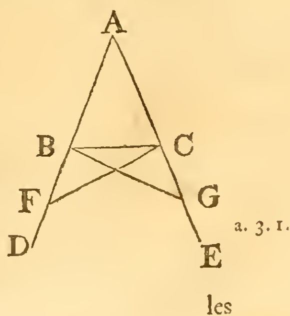
ſed

ſed et punctum B congruebat puncto E; quare baſis BC baſi EF congruet. Nam ſi puncto quidem B congruente ipſi E, C vero ipſi F, baſis BC baſi EF non congruit; duae rectae lineae ſpatium comprehendent, quod fieri non poteſt[a]. Congruet igitur BC baſis baſi EF, et ipſi aequalis erit. Quare et totum ABC triangulum congruet toti triangulo DEF, et ipſi erit aequale; et reliqui anguli reliquis angulis congruent, et ipſis aequales erunt. Videlicet angulus ABC angulo DEF, et angulus ACB angulo DFE. ſi igitur duo triangula duo latera duobus lateribus aequalia habeant, alterum alteri; habeant autem et angulum angulo aequalem, qui aequalibus rectis lineis continetur: et baſim baſi aequalem habebunt; et triangulum triangulo aequale erit; et reliqui anguli reliquis angulis aequales, alter alteri, quibus aequalia latera ſubtenduntur. Quod erat demonſtrandum. a. Ax. 10.

PROP. V. THEOR.

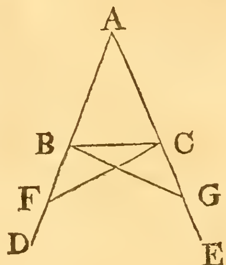
ISOSCELIUM triangulorum qui ad baſim ſunt anguli inter ſe ſunt aequales; et, productis aequalibus rectis lineis, anguli qui ſunt ſub baſi inter ſe aequales erunt.

Sit iſoſceles triangulum ABC, habens latus AB lateri AC aequale, et producantur in directum ipſis AB, AC rectae lineae BD, CE. dico angulum quidem ABC angulo ACB, angulum vero CBD angulo BCE aequalem eſſe.



Sumatur enim in recta BD punctum quodvis F; atque a majore AE minori AF aequalis auferatur AG[a], et jungantur FC, GB. quoniam igitur AF eſt aequalis AG, AB vero ipſi AC; duae FA, AC duabus GA, AB aequales a. 3. 1.

les ſunt, altera alteri; et angulum FAG communem continent; ba-
b. 4. 1. ſis igitur FC baſi GB eſt aequalis[b], et triangulum AFC aequale triangulo AGB; et reliqui anguli reliquis angulis aequales erunt, alter alteri, quibus aequalia latera ſubtenduntur; videlicet angulus quidem ACF aequalis angulo ABG, angulus vero AFC angulo AGB. et quoniam tota AF toti AG eſt aequalis, quarum AB eſt aequalis ipſi AC; erit et reliqua BF reliquae CG
c. Ax. 3. aequalis[c]. oſtenſa eſt autem FC aequalis GB; duae igitur BF, FC duabus CG, GB aequales ſunt, altera alteri, et angulus BFC aequalis angulo CGB; eſtque baſis ipſorum BC communis; erit igitur et triangulum BFC aequale [b] triangulo CGB, et reliqui anguli reliquis angulis aequales, alter alteri, quibus aequalia latera ſubtenduntur. angulus igitur FBC eſt aequalis angulo GCB, et angulus BCF angulo CBG. itaque quoniam totus ABG angulus toti angulo ACF aequalis oſtenſus eſt, quorum angulus CBG eſt aequalis ipſi BCF; erit reliquus ABC reliquo ACB aequalis, et ſunt ad baſim trianguli ABC. oſtenſus autem eſt et FBC angulus aequalis angulo GCB, qui ſunt ſub baſi. Iſoſcelium igitur triangulorum &c. Q. E. D.



Cor. Hinc omne triangulum aequilaterum eſt quoque aequiangulum.

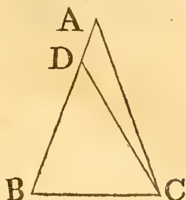
PROP. VI. THEOR.

SI trianguli duo anguli inter ſe ſint aequales, et aequales angulos ſubtendentia latera inter ſe aequalia erunt.

Sit triangulum ABC, habens angulum ABC angulo ACB aequalem; dico et AB latus lateri AC aequale eſſe.

Si

Si enim inaequalis eſt recta AB ipſi AC, altera ipſarum eſt major. ſit major AB; atque a majori AB minori AC aequalis auferatur DB [a], et DC jungatur. quoniam igitur DB eſt aequalis ipſi AC, communis autem BC, erunt duae DB, BC duabus AC, CB aequales, altera alteri, et angulus DBC angulo ACB eſt aequalis; baſis igitur DC baſi AB aequalis eſt, et triangulum DBC aequale [b] triangulo ACB, minus majori; quod eſt abſurdum. non igitur inaequalis eſt AB ipſi AC; ergo aequalis erit. ſi igitur trianguli &c. Q. E. D. a. 3. 1. b. 4. 1.



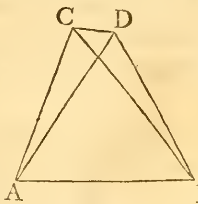
Cor. Hinc omne triangulum aequiangulum eſt quoque aequilaterum.

PROP. VII. THEOR.

SUPER eadem baſi, et ad eaſdem ejus partes, duo triangula non conſtituentur, quae habent et latera quae ad alterum baſis terminum, et ea quae ad reliquum terminum ducta ſunt, inter ſe aequalia.

Si enim fieri poteſt, ſuper eadem baſi AB, et ad eaſdem ejus partes conſtituantur duo triangula ACB, ADB quae habent et latera CA, DA inter ſe aequalia, et latera CB, DB.

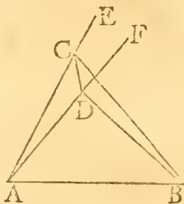
Jungatur CD; vel igitur vertex neutrius trianguli eſt intra reliquum triangulum, vel vertex alterius eſt intra reliquum. Primo ſit neutrius trianguli vertex intra reliquum; et quoniam AC eſt aequalis ipſi AD, erit et angulus ACD angulo ADC aequalis [a]. eſt autem angulus ACD major angulo BCD, major igitur eſt ADC angulus angulo BCD. quare angulus BDC angulo BCD a. 5. 1.



multo

multo major erit. rurſus quoniam CB eſt aequalis ipſi DB, et angu-
a. 5. 1. lus BDC aequalis [a] erit angulo BCD; oſtenſus autem eſt ipſo major; quod fieri non poteſt.

Sed ſit alterutrius trianguli vertex, puta D, intra reliquum triangulum ACB; quoniam igitur AC eſt aequalis ipſi AD, erunt anguli ECD, FDC ſub baſi inter ſe aequales [a]; eſt autem angulus ECD major angulo BCD, quare FDC angulus major eſt angulo BCD; multo igitur angulus BDC major eſt angulo BCD. rurſus quoniam CB aequalis eſt ipſi DB, erit angulus BDC aequalis angulo BCD [a]; oſtenſus autem eſt BDC angulus eodem BCD major. quod fieri non poteſt. caſus autem in quo vertex unius trianguli cadit in latus alterutrum reliqui demonſtratione non eget.



Non igitur ſuper eâdem baſi, et ad eaſdem ejus partes conſtituentur duo triangula, quae habent et latera quae ad alterum baſis terminum, et ea quae ad reliquum terminum ducta ſunt, inter ſe aequalia. Q. E. D.

PROP. VIII. THEOR.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus aequalia habeant, alterum alteri, habeant autem et baſim baſi aequalem; angulum quoque, qui aequalibus lateribus continetur, angulo aequalem habebunt.

Sint duo triangula ABC, DEF quae duo latera AB, AC duobus lateribus DE, DF aequalia habeant, alterum alteri, AB quidem aequale DE, AC vero ipſi DF; habeant autem et baſim BC baſi EF aequalem. dico angulum quoque BAC angulo EDF aequalem eſſe.

Triangulo enim ABC applicato ipſi DEF triangulo, et puncto quidem

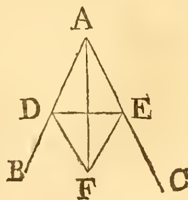
dem B poſito in E, rectâ vero lineâ BC in EF; congruet et C punctum puncto F, quoniam BC ipſi EF eſt aequalis. itaque congruente BC ipſi EF, congruent et BA, AC ipſis ED, DF. ſi enim baſis quidem BC baſi EF congruit, latera autem BA, AC lateribus ED, DF non congruunt, ſed ſitum mutant, ut EG, GF; conſtituentur ſuper eadem baſi, et ad eaſdem ejus partes, duo triangula, quae habent et latera quae ad alterum baſis terminum, et ea quae ad reliquum ducta ſunt, inter ſe aequalia. non conſtituuntur autem[a]. a. 7. 1. non igitur ſi baſis BC congruit baſi EF, non congruent et BA, AC latera lateribus ED, DF. congruent igitur. quare et angulus BAC angulo EDF congruet, et ipſi erit aequalis[b]. ſi igitur duo triangula &c. b. Ax. 8. Q. E. D.

PROP. IX. PROB.

DATUM angulum rectilineum bifariam ſecare.

Sit datus angulus rectilineus BAC; itaque oportet ipſum bifariam ſecare.

Sumatur in AB quodvis punctum D, et a recta linea AC ipſi AD aequalis auferatur [a] AE; junctaque DE conſtituatur ſuper eâ triangulum aequilaterum [b] DEF, et AF jungatur. dico angulum BAC a recta linea AF bifariam ſecari. a. 3. 1. b. 1. 1.



Quoniam enim AD eſt aequalis ipſi AE, communis autem AF; duae DA, AF duabus EA, AF aequales ſunt, altera alteri; et baſis

DF

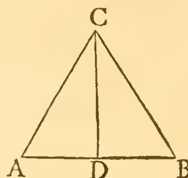
DF eſt aequalis baſi EF; angulus igitur DAF angulo EAF eſt aequa-
c. 8. 1. lis [c]. quare datus angulus rectilineus BAC a recta linea AF bifariam ſectus eſt. Q. E. F.

PROP. X. PROB.

DATAM rectam lineam terminatam bifariam ſecare.

Sit data recta linea terminata AB; oportet ipſam AB bifariam ſecare.

a. 1. 1. Conſtituatur ſuper eâ triangulum aequilaterum [a] ABC, et ſecetur
b. 9. 1. ACB angulus bifariam [b] rectâ linea CD. dico AB rectam lineam in puncto D bifariam ſecari.



Quoniam enim AC eſt aequalis CB, communis autem CD; duae AC, CD duabus BC, CD aequales ſunt, altera alteri; et angulus ACD eſt aequalis angulo BCD; baſis igitur AD baſi DB
c. 4. 1. eſt aequalis [c]. recta igitur linea terminata AB bifariam ſecta eſt in puncto D. Q. E. F.

PROP. XI. PROB.

DATAE rectae lineae, a puncto in ipſa dato, ad rectos angulos rectam lineam ducere.

Sit data recta linea AB, et datum in ipſa punctum C; oportet a puncto C ipſi AB ad rectos angulos rectam lineam ducere.

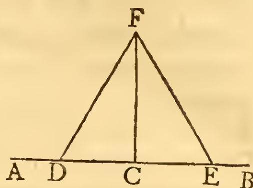
a. 3. 1. Sumatur in AC punctum quodvis D, ipſique CD aequalis ponatur [a]
b. 1. 1. CE, et ſuper DE conſtituatur triangulum aequilaterum [b] DFE, et FC jungatur. dico datae rectae lineae AB a puncto C in ipſa dato, ad rectos angulos ductam eſſe FC.

Quoniam

Quoniam enim DC eſt aequalis CE, et FC communis; duae DC, CF duabus EC, CF ſunt aequales, altera alteri; et baſis DF eſt aequalis baſi FE; angulus igitur DCF angulo ECF eſt aequalis[c], et ſunt deinceps. Quando autem recta linea ſuper rectâ lineâ inſiſtens, eos qui deinceps ſunt angulos aequales inter ſe fecerit, rectus [d] eſt uterque aequalium angulorum; ergo uterque ipſorum DCF, FCE eſt rectus. Datae igitur rectae lineae AB, a puncto in ipſa dato C, ad rectos angulos ducta eſt recta linea FC. Q. E. F.

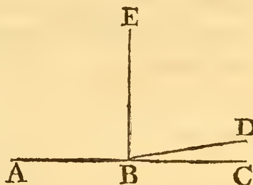
c. 8. 1.

d. 10. Def. 1.



Cor. Hinc oſtendi poteſt duas rectas lineas non habere ſegmentum commune.

Non enim, ſed ſi fieri poteſt, habeant duae rectae lineae ABC, ABD ſegmentum commune AB. a puncto B ducatur BE ad rectos angulos ipſi AB; quoniam igitur recta linea eſt ABC, erit [d] angulus CBE aequalis angulo EBA; ſimiliter quoniam recta linea eſt ABD, erit angulus DBE angulo EBA aequalis. eſt igitur angulus DBE ipſi CBE angulo aequalis, minor majori, quod fieri non poteſt. igitur duae rectae lineae non poſſunt habere ſegmentum commune.



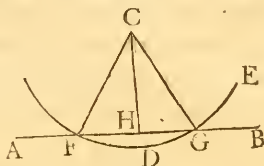
PROP. XII. PROB.

SUPER datam rectam lineam infinitam, a dato puncto, quod in ea non eſt, perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit data quidem recta linea AB, datum vero punctum C, quod in ea non eſt. oportet ſuper datam rectam lineam infinitam AB, a dato puncto C, quod in ea non eſt, perpendicularem rectam lineam ducere.

Sumatur enim ad alteras partes ipſius AB rectae lineae, punctum quodvis D, et centro quidem C, intervallo autem CD circulus deſcribatur [a] EGF, quae rectae AB in F, G, occurrat; et FG in H bifariam ſecetur [b], junganturque CF, CH, CG. dico ſuper datam rectam lineam infinitam AB, a dato puncto C, quod in ea non eſt, perpendicularem CH ductam eſſe.

a. Poſt. 3.
b. 10. 1.



Quoniam enim aequalis eſt FH ipſi HG, communis autem HC, duae FH, HC, duabus GH, HC ſunt aequales, altera alteri; et baſis CF eſt aequalis baſi CG [c]; angulus igitur CHF angulo CHG eſt aequalis [d], et ſunt deinceps. quando autem recta linea ſuper recta linea inſiſtens, eos qui deinceps ſunt angulos, aequales inter ſe fecerit, rectus eſt uterque aequalium angulorum; et quae inſiſtit recta linea perpendicularis appellatur ad eam cui inſiſtit. ſuper datam igitur rectam lineam infinitam AB a dato puncto C, quod in ea non eſt, perpendicularis ducta eſt CH. Q. E. F.

c. Def. 15.
d. 8. 1.

PROP. XIII. THEOR.

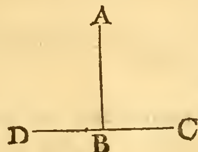
CUM recta linea ſuper rectam inſiſtens lineam angulos fecerit, vel duos rectos, vel duobus rectis aequales efficiet.

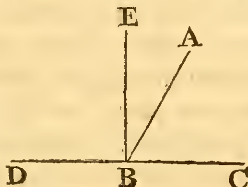
Recta enim linea quaedam AB ſuper rectam CD inſiſtens, angulos faciat CBA, ABD. dico CBA, ABD angulos vel duos rectos eſſe, vel duobus rectis aequales.

a. Def. 10. Si enim angulus CBA eſt aequalis ipſi ABD, duo recti ſunt [a]. ſin minus,

minus, ducatur a puncto B ipsi CD ad rectos angulos [b] BE. anguli igitur CBE, EBD sunt duo recti [a]. et quoniam CBE duobus CBA, ABE est aequalis, communis apponatur EBD; ergo anguli CBE, EBD tribus angulis CBA, ABE, EBD sunt aequales [c]. rursus quoniam DBA angulus est aequalis duobus DBE, EBA, communis apponatur ABC; an-

b. 11. 1.
a. Def. 10.
c. Ax. 2.





guli igitur DBA, ABC tribus DBE, EBA, ABC aequales sunt. ostensi autem sunt anguli CBE, EBD iisdem tribus aequales; quae vero eidem sunt aequalia, et inter se aequalia sunt [d]; igitur et anguli CBE, EBD ipsis DBA, ABC sunt aequales. sed CBE, EBD sunt duo recti; igitur DBA, ABC duobus rectis aequales sunt. ergo cum recta linea &c. Q. E. D.

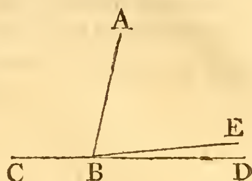
d. Ax. 1.

PROP. XIV. THEOR.

SI ad aliquam rectam lineam, atque ad punctum in ea duae rectae lineae non ad easdem partes positae angulos, qui deinceps sunt, duobus rectis aequales fecerint; ipsae rectae lineae in directum sibi invicem erunt.

Ad aliquam rectam lineam AB, atque ad punctum in ea B, duae rectae lineae BC, BD non ad easdem partes positae angulos, qui deinceps sunt, ABC, ABD duobus rectis aequales faciant. dico BD ipsi CB in directum esse.

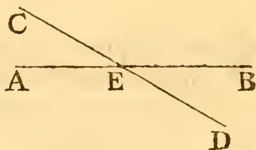
Si enim BD non eſt in directum ipſi CB, ſit ipſi CB in directum BE. Quoniam igitur recta linea AB ſuper recta CBE inſiſtit, anguli
a. 13. 1. ABC, ABE duobus rectis ſunt aequales[a]. ſunt autem et anguli ABC, ABD aequales duobus rectis. anguli igitur CBA, ABE ipſis CBA, ABD aequales erunt. communis auferatur ABC; reliquus igitur ABE
b. 3. Ax. reliquo ABD eſt aequalis[b], minor majori, quod fieri non poteſt. non igitur BE eſt in directum ipſi BC. ſimiliter oſtendemus neque aliam quampiam eſſe praeter BD. in directum igitur eſt CB ipſi BD. ſi igitur ad aliquam rectam lineam &c. Q. E. D.



PROP. XV. THEOR.

SI duae rectae lineae ſe invicem ſecuerint, angulos qui ad verticem ſunt, inter ſe aequales efficient.

Duae enim rectae lineae AB, CD ſe invicem ſecent in puncto E. dico angulum quidem AEC angulo DEB, angulum vero CEB angulo AED aequalem eſſe.



Quoniam enim recta linea AE ſuper recta CD inſiſtens angulos facit CEA, AED; erunt CEA, AED duobus rectis
a. 13. 1. aequales[a]. rurſus quoniam recta linea DE ſuper recta AB inſiſtens facit angulos AED, DEB, erunt AED, DEB anguli aequales duobus rectis[a]. oſtenſi autem ſunt anguli quoque CEA, AED duobus rectis aequales; anguli igitur CEA, AED angulis AED, DEB aequales ſunt. communis auferatur AED; reliquus igitur CEA reliquo

reliquo BED eſt aequalis. ſimili ratione oſtendetur et angulos CEB, AED aequales eſſe. ſi igitur duae rectae lineae &c. Q. E. D.

Cor. 1. Ex hoc manifeſte conſtat duas rectas lineas ſe invicem ſecantes, facere angulos ad ſectionem quatuor rectis aequales.

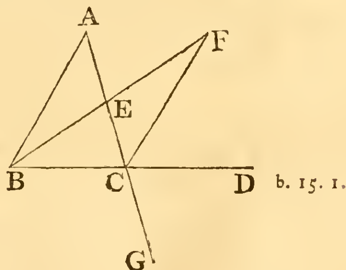
Cor. 2. Et propterea, omnes anguli circa unum punctum conſtituti conficiunt angulos quatuor rectis aequales.

PROP. XVI. THEOR.

OMNIS trianguli, uno latere producto, exterior angulus utrovis interiore et oppoſito eſt major.

Sit triangulum ABC, et unum ipſius latus BC ad D producatur. dico exteriorem angulum ACD utrovis interiore et oppoſito, videlicet CBA, BAC majorem eſſe.

Secetur AC biſariam in E[a], et juncta BE producatur ad F, ponaturque ipſi BE aequalis EF; jungatur etiam FC, et AC ad G producatur. a. 10. 1.



Quoniam igitur AE quidem eſt aequalis EC, BE vero ipſi EF, duae AE, EB duabus CE, EF aequales ſunt, altera alteri; et angulus AEB, angulo CEF eſt aequalis[b], ad verticem enim ſunt. Baſis igitur AB aequalis eſt baſi CF, et AEB triangulum triangulo CEF, et reliqui anguli reliquis angulis aequales[c], alter alteri, quibus aequalia latera ſubtenduntur. angulus igitur BAE eſt aequalis angulo ECF. major autem eſt angulus ECD ipſo ECF; quare major eſt angulus ACD angulo BAE. ſimiliter rectâ lineâ

b. 15. 1.

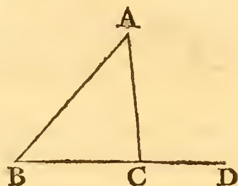
c. 4. 1.

neâ BC bifariam ſectâ, oſtendetúr etiam BCG angulus, hoc eſt ACD
d. 15. 1. angulus [d] angulo ABC major. Omnis igitur trianguli &c. Q. E. D.

PROP. XVII. THEOR.

OMNIS trianguli duo anguli duobus rectis minores ſunt, quomodocunque ſumpti.

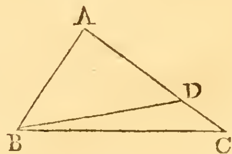
Sit triangulum ABC; dico ipſius ABC trianguli duos angulos quomodocunque ſumptos duobus rectis minores eſſe.



Producatur enim BC ad D; et quoniam trianguli ABC exterior angulus eſt ACD, erit ACD major interiore et oppo-
a. 16. 1. ſito ABC [a]; communis apponatur ACB; anguli igitur ACD, ACB angulis ABC, ACB
b. 13. 1. majores ſunt. ſed ACD, ACB ſunt aequales duobus rectis [b]; anguli igitur ABC, BCA duobus rectis ſunt minores. ſimiliter oſtendemus angulos quoque BAC, ACB, itemque CAB, ABC duobus rectis minores eſſe. Omnis igitur trianguli &c. Q. E. D.

PROP. XVIII. THEOR.

OMNIS trianguli majus latus majorem angulum ſubtendit.



Sit triangulum ABC habens latus AC latere AB majus; dico et ABC angulum angulo BCA majorem eſſe.

Quoniam enim AC major eſt quam AB,
a. 3. 1. ponatur ipſi AB aequalis AD [a], et BD

jungatur.

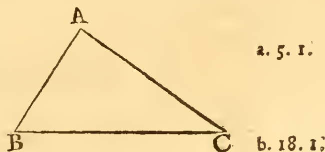
jungatur. et quoniam trianguli BDC exterior angulus est ADB, erit ADB major interiore et opposito DCB[b]. aequalis autem est ADB ipsi ABD, quod et latus AB lateri AD sit aequale[c]; major igitur est et ABD angulus angulo ACB; quare ABC ipso ACB multo major erit. Omnis igitur trianguli &c. Q. E. D. b. 16. 1. c. 5. 1.

PROP. XIX. THEOR.

OMNIS trianguli major angulus a majore latere subtenditur.

Sit triangulum ABC habens ABC angulum majorem angulo BCA. dico et latus AC latere AB majus esse.

Si enim non est majus, vel AC est aequale ipsi AB, vel ipso minus. aequale autem non est, nam et angulus ABC angulo ACB aequalis esset[a]; non est autem; non igitur AC ipsi AB est aequale. sed neque minus est latus AC ipso AB; esset enim et angulus ABC angulo ACB minor[b]; atqui non est; non igitur AC latus minus est ipso AB. ostensum autem est neque aequale esse; est igitur AC ipso AB majus. Omnis igitur trianguli &c. Q. E. D. a. 5. 1. b. 18. 1.



PROP. XX. THEOR.

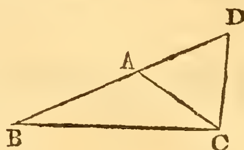
OMNIS trianguli duo latera reliquo majora sunt, quomodocunque sumpta.

Sit enim triangulum ABC; dico ipsius ABC trianguli duo latera reliquo majora esse, quomodocunque sumpta; videlicet latera quidem BA, AC

AC majora latere BC; latera vero AB, BC majora latere AC; et latera BC, CA majora ipſo AB.

Producatur enim BA ad punctum D, ponaturque ipſi CA aequalis
a. 3. 1. AD[a], et DC jungatur.

Quoniam igitur DA eſt aequalis AC, erit et angulus ADC angulo
b. 5. 1. ACD aequalis[b]. ſed BCD angulus major eſt angulo ACD; angulus igitur BCD angulo ADC eſt major. et quoniam triangulum eſt DCB habens BCD angulum majorem angulo BDC, majorem autem angu-
c. 19. 1. lum majus latus ſubtendit[c], erit latus DB latere BC majus. eſt autem DB aequale ipſis BA, AC; majora igitur ſunt latera BA, AC ipſo BC. ſimiliter oſtendemus, et latera quidem AB, BC majora eſſe latere CA; latera vero BC, CA ipſo AB majora. Omnis igitur trianguli &c. Q. E. D.



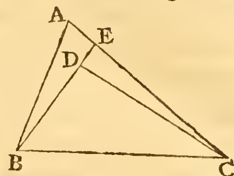
PROP. XXI. THEOR.

SI a terminis unius lateris trianguli duae rectae lineae intra conſtituantur, hae reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, majorem vero angulum continebunt.

Trianguli enim ABC in uno latere BC a terminis B, C duae rectae lineae intra conſtituantur BD, DC. dico BD, DC reliquis duobus trianguli lateribus BA, AC minores quidem eſſe, continere vero angulum BDC majorem angulo BAC.

Producatur enim BD ad E; et quoniam omnis trianguli duo latera
a. 20. 1. reliquo ſunt majora[a], erunt trianguli ABE duo latera BA, AE, majora latere BE. communis apponatur EC; ſunt igitur latera BA, AC ipſis

ipſis BE, EC majora[b]. rurſus quoniam CED trianguli duo latera CE, ED ſunt majora latere CD, communis apponatur DB; ſunt igitur CE, EB majora ipſis CD, DB[b]. ſed oſtenſum eſt BA, AC majora eſſe BE, EC; multo igitur BA, AC, ipſis BD, DC majora ſunt. b. Ax. 4.

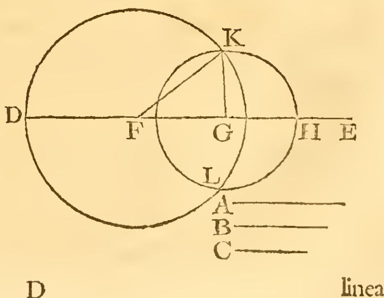


Rurſus quoniam omnis trianguli exterior angulus interiore et oppoſito eſt major[c], erit trianguli CDE exterior angulus BDC major ipſo CED. eadem ratione et trianguli ABE exterior angulus CEB ipſo BAC eſt major. ſed angulus BDC oſtenſus eſt major angulo CEB; multo igitur BDC angulus angulo BAC major erit. ſi igitur a terminis unius lateris &c. Q. E. D. c. 16. 1.

PROP. XXII. PROB.

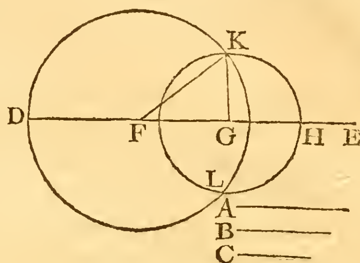
EX tribus rectis lineis, quae tribus rectis lineis datis aequales ſunt, triangulum conſtituere. oportet autem duas reliqua majores eſſe, quomodocunque ſumptas[a]. a. 20. 1.

Sint tres datae rectae lineae A, B, C, quarum duae reliquâ majores ſunt, quomodocunque ſumptae, ut ſcilicet A, B, quidem ſint majores quam C; A, C, vero majores quam B; et praeterea B, C majores quam A. itaque oportet ex rectis lineis aequalibus ipſis A, B, C, triangulum conſtituere.



Exponatur aliqua recta

linea DE, terminata quidem ad D, infinita vero ad E; et ponatur ipsi
a. 3. 1. quidem A aequalis [a] DF, ipsi vero B aequalis FG, et ipsi C aequalis
b. Post. 3. GH; et centro F, intervallo autem FD circulus describatur [b] DKL. rursusque centro G et intervallo GH alius circulus KLH describatur, et jungantur KF, KG. dico ex tribus rectis lineis aequalibus ipsis A, B, C, triangulum KFG constitutum esse.



Quoniam enim punctum F centrum est DKL circuli,
c. Def. 15. erit FD aequalis FK [c]; sed FD est aequalis rectae lineae A; est igitur FK aequalis ipsi A. rursus quoniam punctum G centrum est circuli LKH, erit GH aequalis GK [c]; sed GH est aequalis ipsi C; igitur et GK ipsi C aequalis erit. est autem et FG aequalis B; tres igitur rectae lineae KF, FG, GK tribus A, B, C aequales sunt. ex tribus igitur rectis lineis KF, FG, GK quae sunt aequales tribus datis rectis lineis A, B, C, triangulum constitutum est KFG. Q. E. F.

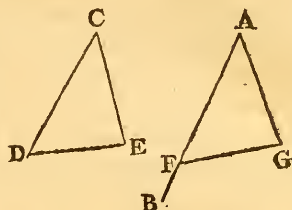
PROP. XXIII. PROB.

AD datam rectam lineam, et ad datum in ea punctum, dato angulo rectilineo aequalem angulum rectilineum constituere.

Sit data quidem recta linea AB, datum vero in ipsa punctum A, et datus angulus rectilineus DCE; oportet ad datam rectam lineam AB, et ad datum in ea punctum A, dato angulo rectilineo DCE aequalem angulum rectilineum constituere.

Sumantur

Sumantur in utraque ipsarum CD, CE quaevis puncta D, E, jungaturque DE; et ex tribus rectis lineis, quae aequales sint tribus CD, DE, EC triangulum constituatur [a] AFG, ita ut CD sit aequalis AF, et CE ipsi AG, et DE ipsi FG. Quoniam igitur duae DC, CE duabus FA, AG aequales sunt, altera alteri, et basis DE est aequalis basi FG; angulus DCE aequalis erit angulo FAG [b]. Ad datam igitur rectam lineam AB, et ad datum in ea punctum A, dato angulo rectilineo DCE aequalis angulus rectilineus constitutus est FAG. Q. E. F.



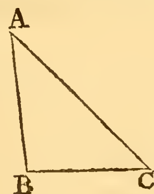
a. 22. 1.

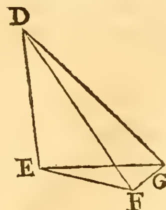
b. 8. 1.

PROP. XXIV. THEOR.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus aequalia habeant, alterum alteri, angulum autem angulo majorem, qui aequalibus rectis lineis continetur; et basim basi majorem habebunt.

Sint duo triangula ABC, DEF, quae duo latera AB, AC duobus lateribus DE, DF aequalia habeant, alterum alteri, videlicet latus quidem AB aequale lateri DE, latus vero AC aequale DF; at angulus BAC angulo EDF sit major. dico, basim BC basi EF majorem esse.



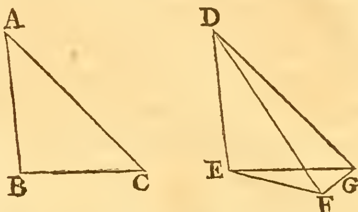


Rectarum enim DE, DF sit DE ea quae non major est altera DF, et constituatur ad rectam lineam DE, et ad punctum in ea D,

D 2 angulo

a. 23. 1. angulo BAC aequalis angulus EDG [a]; ponaturque alterutri ipſarum
b. 3. 1. AC, DF aequalis DG [b], et EG, GF jungantur.

Itaque quoniam AB quidem eſt aequalis DE, AC vero ipſi DG, duae BA, AC duabus ED, DG aequales ſunt, altera alteri; et angulus BAC eſt aequalis angulo EDG; baſis igitur BC baſi EG eſt ae-
c. 4. 1. qualis [c]. rurſus quoniam aequalis eſt DG ipſi DF, eſt angulus DFG
d. 5. 1. angulo DGF aequalis [d]; major autem eſt angulus DGF angulo EGF, erit itaque DFG angulus angulo EGF major; multo igitur major eſt EFG angulus ipſo EGF. et quoniam triangulum eſt EFG angulum EFG majorem habens an-
e. 19. 1. gulo EGF, majori autem angulo latus majus ſubtenditur [e]; erit latus EG latere EF majus. ſed EG latus eſt aequale lateri BC; ergo et BC ipſo EF majus erit. ſi igitur duo triangula &c. Q. E. D.



PROP. XXV. THEOR.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus aequalia habeant, alterum alteri, baſim vero baſi majorem; et angulum angulo, qui aequalibus lateribus continetur, majorem habebunt.

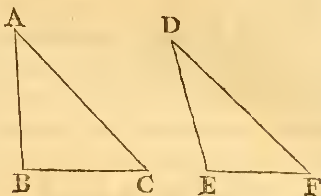
Sint duo triangula ABC, DEF, quae duo latera AB, AC duobus lateribus DE, DF aequalia habeant, alterum alteri, videlicet latus AB aequale lateri DE, et latus AC lateri DF; baſis autem BC baſi EF ſit major. dico, et angulum BAC angulo EDF majorem eſſe.

Si enim non eſt major, vel aequalis eſt vel minor. aequalis autem non eſt angulus BAC angulo EDF, eſſet enim et baſis BC baſi EF aequalis [a].

aequalis[a]. Non est autem; non igitur aequalis est BAC angulus angulo EDF. sed neque minor; minor enim esset et basis BC basi EF[b]. atqui non est; non igitur angulus BAC angulo EDF est minor. ostensum autem est neque aequalem esse; angulus igitur BAC angulo EDF major erit. si igitur duo triangula &c. Q. E. D.

a. 4. 1.

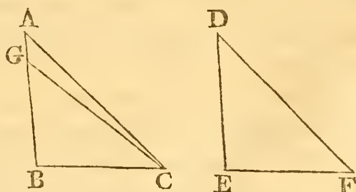
b. 24. 1.



PROP. XXVI. THEOR.

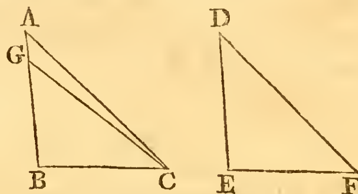
SI duo triangula duos angulos duobus angulis aequales habeant, alterum alteri, unumque latus uni lateri aequale, vel quod aequalibus adjacet angulis, vel quod uni aequalium angulorum subtenditur; et reliqua latera reliquis lateribus aequalia, alterum alteri, et reliquum angulum reliquo angulo aequalem habebunt.

Sint duo triangula ABC, DEF, quae duos angulos ABC, BCA duobus angulis DEF, EFD aequales habeant, alterum alteri, videlicet angulum quidem ABC aequalem angulo DEF, angulum vero BCA angulo EFD; habeant autem et unum latus uni lateri aequale; et primo, quod aequalibus adjacet angulis, nempe latus BC lateri EF. dico et reliqua latera reliquis lateribus aequalia habere, alterum alteri, latus scilicet AB lateri DE, et latus



tus AC lateri DF; et reliquum angulum BAC reliquo angulo EDF aequalem.

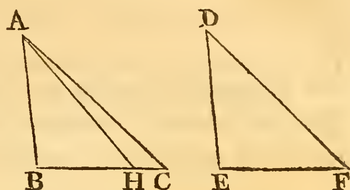
Si enim inaequalis eſt recta linea AB ipſi DE, una ipſarum major eſt. ſit major AB, ponaturque BG aequalis DE, et GC jungatur. Quoniam igitur BG quidem eſt aequalis DE, BC vero ipſi EF, duae GB, BC duabus DE, EF aequales ſunt, altera alteri; et angulus GBC eſt aequalis angulo DEF: baſis
a. 4. 1. igitur GC baſi DF eſt aequalis[a], et GBC triangulum triangulo DEF, et reliqui anguli reliquis angulis aequales, alter alteri, quibus aequalia latera ſubtenduntur; ergo GCB angulus eſt aequalis angulo DFE; ſed angulus DFE angulo BCA aequalis ponitur; quare et BCG angulus angulo BCA eſt aequalis, minor majori, quod fieri non poteſt. non igitur inaequalis eſt AB ipſi DE; ergo aequalis erit. eſt autem et BC aequalis EF; itaque duae AB, BC duabus DE, EF aequales ſunt, altera alteri, et angulus ABC aequalis eſt angulo DEF; baſis igitur AC baſi DF, et reliquus angulus BAC reliquo angulo EDF eſt aequalis[a].



Sed rurſus ſint latera quae aequalibus angulis ſubtenduntur aequalia, ut AB ipſi DE; dico rurſus, et reliqua latera reliquis lateribus aequalia eſſe, AC quidem ipſi DF, BC vero ipſi EF; et adhuc reliquum angulum BAC reliquo angulo EDF aequalem.

Si enim inaequalis eſt recta linea BC ipſi EF, una ipſarum major eſt. ſit major BC, ſi fieri poteſt, ponaturque BH aequalis EF, et AH jungatur. Quoniam igitur BH quidem eſt aequalis EF, AB vero ipſi DE; duae AB, BH duabus DE, EF aequales ſunt, altera alteri; et aequales angulos continent; ergo baſis AH baſi DF eſt aequalis, et ABH triangulum

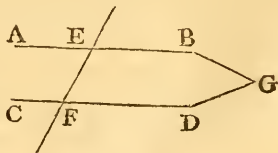
triangulum triangulo DEF, et reliqui anguli reliquis angulis aequales erunt, alter alteri, quibus aequalia latera ſubtenduntur. aequalis igitur eſt angulus BHA angulo EFD. ſed EFD eſt aequalis angulo BCA[b]; b. ex hyp. ergo et BHA angulus angulo BCA eſt aequalis, trianguli ſcilicet AHC exterior angulus BHA aequalis interiori et oppoſito BCA, quod fieri non poteſt[c]. c. 16. 1. quare non inaequalis eſt BC ipſi EF; aequalis igitur; eſt autem et AB aequalis DE; duae igitur AB, BC duabus DE, EF aequales ſunt, altera alteri; anguloſque aequales continent; quare baſis AC aequalis eſt baſi DF, et reliquus angulus BAC reliquo angulo EDF eſt aequalis. ſi igitur duo triangula &c. Q. E. D.



PROP. XXVII. THEOR.

SI in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter ſe aequales fecerit, parallelae erunt rectae lineae.

In duas enim rectas lineas AB, CD recta linea EF incidens alternos angulos AEF, EFD aequales inter ſe faciat; dico rectam lineam AB ipſi CD parallelam eſſe.



Si enim non eſt parallela, productae AB, CD, vel ad partes BD convenient, vel ad partes AC. producantur, conveniantque ad partes BD in puncto G; itaque GEF trianguli exterior angulus AEF major eſt interiore et oppoſito EFG[a]; ſed et aequalis, a. 16. 1. quod

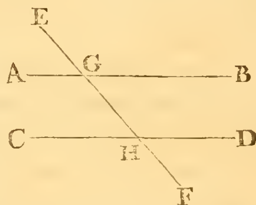
quod fieri non poteft. non igitur AB, CD productae ad partes BD convenient. fimiliter demonftrabitur neque convenire ad partes AC. quae
b. Def. 35. vero ad neutras partes conveniunt, parallelae inter fe funt[b]. parallela igitur eft AB ipfi CD. quare fi in duas rectas lineas &c. Q. E. D.

PROP. XXVIII. THEOR.

SI in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulum interiori, et oppofito, et ad eafdem partes aequalem fecerit; vel interiores et ad eafdem partes duobus rectis aequales: parallelae erunt inter fe rectae lineae.

In duas enim rectas lineas AB, CD recta linea EF incidens exteriorem angulum EGB interiori et oppofito ad eafdem partes GHD aequalem faciat; vel interiores et ad eafdem partes BGH, GHD duobus rectis aequales. dico rectam lineam AB rectae CD parallelam effe.

Quoniam enim EGB angulus aequalis eft angulo GHD, angulus
a. 15. 1. autem EGB angulo AGH[a], erit et angulus AGH angulo GHD ae-
b. 27. 1. qualis; et funt alterni; parallela [b] igitur eft AB ipfi CD. rurfus quoniam anguli BGH,
c. ex hyp. GHD duobus rectis funt aequales[c], et funt
d. 13. 1. AGH, BGH aequales duobus rectis[d]; erunt anguli AGH, BGH angulis BGH, GHD aequales. communis auferatur BGH; reliquus igitur AGH eft aequalis reliquo GHD; et funt alterni; ergo AB ipfi CD parallela erit. fi igitur in duas rectas lineas &c. Q. E. D.



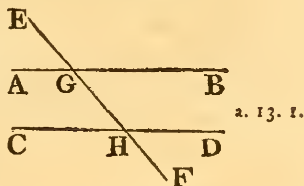
PROP. XXIX.

PROP. XXIX. THEOR.

IN parallelas rectas lineas recta linea incidens, et alternos angulos inter se aequales; et exteriorem interiori et opposito et ad easdem partes aequalem; et interiores et ad easdem partes, duobus rectis aequales efficiet. Vid. Notas ad hanc Prop.

In parallelas enim rectas lineas AB, CD recta linea incidat EF. dico alternos angulos AGH, GHD inter se aequales efficere; et exteriorem EGB interiori et opposito et ad easdem partes GHD aequalem; et interiores et ad easdem partes BGH, GHD duobus rectis aequales.

Si enim inaequalis est AGH ipsi GHD, unus ipsorum major est; sit major AGH. et quoniam AGH angulus major est angulo GHD, communis apponatur BGH; anguli igitur AGH, BGH angulis BGH, GHD majores sunt. sed anguli AGH, BGH sunt aequales duobus rectis[a]; ergo BGH, GHD anguli sunt duobus rectis minores. quae vero cum aliqua recta angulos interiores et ad easdem partes minores duobus rectis efficiunt, in infinitum productae inter se conveniunt*; ergo rectae lineae AB, CD in infinitum productae inter se convenient. atqui non conveniunt, cum parallelae ponantur. non igitur inaequalis est angulus AGH angulo GHD; est igitur aequalis. angulus autem AGH aequalis est angulo EGB[b]; ergo et EGB ipsi GHD aequalis erit. communis apponatur BGH; anguli igitur EGB, BGH sunt aequales angulis BGH, GHD; sed EGB, BGH aequales [a] sunt duobus rectis; ergo et BGH, GHD duobus rectis aequales erunt. in parallelas igitur rectas lineas &c. Q. E. D.



a. 13. 1.

* Ax. 12. Vid. Notas ad hanc Prop.

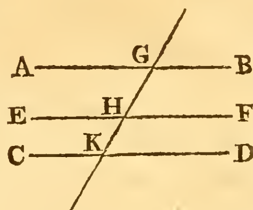
b. 15. 1.

PROP. XXX. THEOR.

QUAE eidem rectae lineae sunt parallelae, et inter se sunt parallelae.

Sit utraque ipsarum AB, CD ipsi EF parallela; dico et AB ipsi CD parallelam esse.

Incidat enim in ipsas recta linea GHK; et quoniam in parallelas rectas lineas AB, EF, recta linea GK incidit, angulus AGH angulo GHF est aequa-
a. 29. 1. lis[a]. rursus quoniam in parallelas rectas lineas EF, CD recta linea incidit GK, aequalis est GHF angulus angulo GKD[a]. ostensus autem est et angulus AGK angulo GHF aequalis; ergo et AGK ipsi GKD ae-
b. 27. 1. qualis erit. et sunt alterni; parallela igitur est AB ipsi CD[b]. Ergo quae eidem rectae lineae &c. Q. E. D.

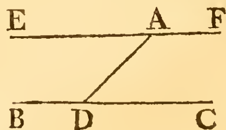


PROP. XXXI. PROB.

PER datum punctum, datae rectae lineae parallelam rectam lineam ducere.

Sit datum quidem punctum A, data vero recta linea BC; oportet per A punctum ipsi BC rectae lineae parallelam rectam lineam ducere.

Sumatur in BC quodvis punctum D, et jungatur AD; constituaturque ad rectam lineam DA, et ad punctum in ipsa A, angulo ADC ae-
a. 23. 1. qualis angulus[a] DAE; et in directum ipsi EA recta linea AF producatur.



Quoniam

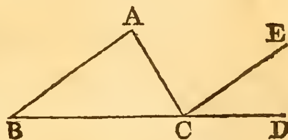
Quoniam igitur in duas rectas lineas BC, EF recta linea AD incidens alternos angulos EAD, ADC inter se aequales efficit, EF ipsi BC parallela erit[b]. Per datum igitur punctum A datae rectae lineae BC b. 27. 1.
parallela ducta est recta linea EAF. Q. E. F.

PROP. XXXII. THEOR.

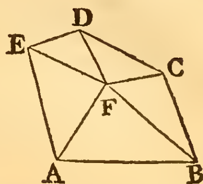
OMNIS trianguli, uno latere producto, exterior angulus duobus interioribus et oppositis est aequalis; et trianguli tres interiores anguli duobus rectis aequales sunt.

Sit triangulum ABC; et unum ipsius latus BC in D producatur. dico angulum exteriorem ACD duobus interioribus et oppositis CAB, ABC aequalem esse; et trianguli tres interiores angulos ABC, BCA, CAB duobus rectis esse aequales.

Ducatur enim per punctum C ipsi AB rectae lineae parallela [a] CE. a. 31. 1.
et quoniam AB ipsi CE parallela est, et in ipsas incidit AC, alterni anguli BAC, ACE inter se aequales sunt[b]. b. 29. 1.
rursus quoniam AB parallela est CE, et in ipsas incidit recta linea BD, exterior angulus ECD interiori et opposito ABC est aequalis[b]. ostensus autem est angulus ACE aequalis angulo BAC; quare totus ACD exterior angulus aequalis est duobus interioribus et oppositis CAB, ABC. communis apponatur ACB; anguli igitur ACD, ACB tribus CBA, BAC, ACB aequales sunt. sed anguli ACD, ACB sunt aequales duobus rectis[c]; ergo et CBA, BAC, ACB duobus rectis sunt c. 13. 1.
aequales. Omnis igitur trianguli uno latere producto &c. Q. E. D.

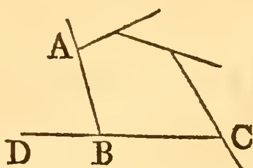


Cor. 1. Omnes ſimul anguli interiores cujuſcunque figurae rectilineae, una cum quatuor rectis angulis, conficiunt bis tot rectos quot ſunt latera figurae.



Nam figura quaevis rectilinea ABCDE dividi poteſt in tot triangula quot ſunt ejus latera, ducendo ſcilicet rectas a puncto F intra figuram ad omnes ejus angulos. triangulorum autem omnes anguli, per praecedentem, ſimul aequales ſunt bis tot rectis quot ſunt triangula, hoc eſt quot ſunt latera figurae. omnes autem iidem anguli aequales ſunt angulis figurae, una cum angulis ad F verticem communem triangulorum,
a. 2. Cor. 15. 1. hoc eſt una cum quatuor rectis[a]. ergo omnes anguli figurae una cum quatuor rectis aequales ſunt bis tot rectis quot ſunt latera.

Cor. 2. Omnes ſimul anguli exteriores cujuſcunque figurae rectilineae aequales ſunt quatuor rectis.



Angulus enim interior ABC ſimul cum
b. 13. 1. exteriore adjacente ABD, aequalis[b] eſt duobus rectis; ergo omnes interiores ſimul cum exterioribus aequales ſunt bis tot rectis quot ſunt latera figurae, hoc eſt, per Corollarium praecedens, omnibus interioribus angulis figurae una cum quatuor rectis. Ergo exteriores aequales ſunt quatuor rectis.

PROP. XXXIII. THEOR.

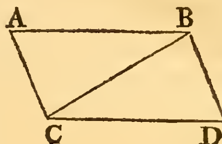
QUAE aequales et parallelas ad eaſdem partes conjungunt rectae lineae, et ipſae aequales et parallelae ſunt.

Sint

Sint aequales et parallelae AB, CD, et ipſas conjungant ad eaſdem partes rectae lineae AC, BD; dico AC, BD aequales, et parallelas eſſe.

Jungatur enim BC; et quoniam AB parallela eſt CD, in ipſaſque incidit BC, alterni anguli ABC, BCD aequales ſunt[a]. et quoniam AB eſt aequalis CD, communis autem BC, duae AB, BC duabus DC, CB ſunt aequales; et angulus ABC aequalis eſt angulo BCD; baſis igitur AC baſi BD eſt aequalis[b], triangulumque ABC triangulo BCD, et reliqui anguli reliquis angulis aequales erunt[b], alter alteri, quibus aequalia latera ſubtenduntur. ergo angulus ACB angulo CBD eſt aequalis. et quoniam in duas rectas lineas AC, BD recta linea BC incidens, alternos angulos ACB, CBD aequales inter ſe efficit, parallela eſt AC ipſi BD[c]. oſtenſa autem eſt et eidem aequalis. Quae igitur aequales et parallelas &c. Q. E. D.

a. 29. 1.



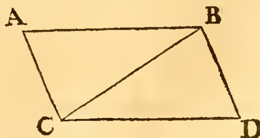
b. 4. 1.

c. 27. 1.

PROP. XXXIV. THEOR.

PARALLELOGRAMMORUM ſpatiorum latera quae ex oppoſito, et anguli, inter ſe aequalia ſunt; et diameter ea bifariam ſecat.

Sit parallelogrammum ABDC, cujus diameter BC. dico ABCD parallelogrammi latera quae ex oppoſito et angulos, inter ſe aequalia eſſe; et diametrum BC ipſum bifariam ſecare.

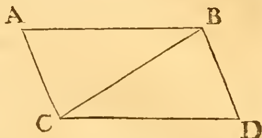


Quoniam enim parallela eſt AB ipſi CD, et in ipſas incidit recta linea BC, anguli alterni ABC, BCD inter ſe aequales ſunt[a]. rurſus quoniam AC ipſi BD parallela eſt, et in ipſas incidit BC, alterni anguli

a. 29. 1.

a. 29. 1. anguli ACB, CBD aequales ſunt inter ſe[a]. duo igitur triangula ſunt ABC, CBD, quae duos angulos ABC, BCA duobus angulis BCD, CBD aequales habent, alterum alteri, et unum latus uni lateri aequale quod eſt ad aequales angulos, commune utrique BC; erga et reliqua latera reliquis lateribus aequalia habebunt, alterum alteri, et reliquum angu-

b. 26. 1. lum reliquo angulo aequalem[b]; aequale igitur eſt latus quidem AB lateri CD, latus vero AC ipſi BD, et angulus BAC angulo BDC aequalis. et quoniam angulus ABC eſt aequalis angulo BCD, et angulus CBD angulo ACB; erit totus angulus ABD aequalis toti ACD. oſtenſus autem eſt et angulus BAC angulo BDC aequalis; parallelogrammorum igitur ſpatiorum latera, quae ex oppoſito, et anguli inter ſe aequalia ſunt. dico etiam diametrum ea bifariam ſecare. Quoniam enim aequalis eſt AB ipſi CD, communis autem BC; duae AB, BC duabus DC, CB aequales ſunt, altera alteri; et angulus ABC aequalis eſt angulo BCD;

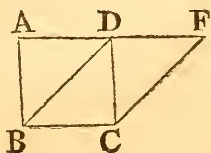


c. 4. 1. triangulum igitur ABC triangulo BCD aequale erit[c]. Ergo diameter BC parallelogrammum ACDB bifariam ſecat. Q. E. D.

PROP. XXXV. THEOR.

PARALLELOGRAMMA ſuper eâdem baſi, et in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe aequalia ſunt.

Vid. Fig. 2. et 3. Sint parallelogramma ABCD, EBCF ſuper eâdem baſi BC, et in eiſdem parallelis AF, BC conſtituta. dico ABCD parallelogrammum EBCF parallelogrammo aequale eſſe.

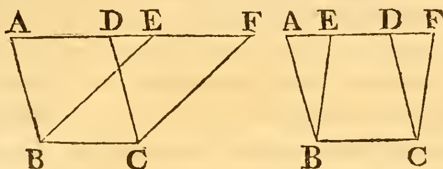


Si enim parallelogrammorum ABCD, DBCF latera AD, DF baſi BC oppoſita, in eodem

puncto

puncto D terminata fuerint, manifestum est utrumque parallelogrammum duplum esse trianguli BDC[a]; quare et inter se sunt aequalia. a. 34. 1.

Non autem sint parallelogrammorum ABCD, EBCF latera AD, EF basi opposita, in eodem puncto terminata; et quoniam parallelogrammum est ABCD, aequalis est AD ipsi BC[a]; eadem quoque ratione et EF aequalis est BC; quare et AD ipsi EF aequalis erit[b]; et b. Ax. 1. communis est DE; tota igitur vel reliqua AE toti vel reliquae DF est



aequalis[c]. est autem et AB aequalis DC; ergo duae EA, AB duabus c. Ax. 2. 3. FD, DC aequales sunt, altera alteri; et angulus FDC aequalis est angulo EAB exterior interiori[d]; basis igitur EB basi FC est aequalis, et d. 29. 1. EAB triangulum aequale[e] triangulo FDC. auferatur triangulum FDC e. 4. 1. e trapezio ABCF, et ex eodem trapezio auferatur triangulum EAB, reliquum igitur parallelogrammum ABCD aequale erit reliquo parallelogrammo EBCF[f]. Ergo parallelogramma super eadem basi &c. f. Ax. 3. Q. E. D.

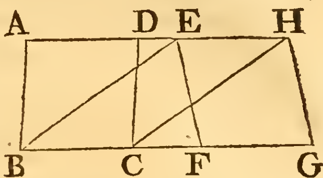
PROP. XXXVI. THEOR.

PARALLELOGRAMMA super aequalibus basibus, et in eisdem parallelis constituta, inter se aequalia sunt.

Sint parallelogramma ABCD, EFGH super aequalibus basibus BC, FG, et in eisdem parallelis AH, BG constituta; dico parallelogrammum ABCD ipsi EFGH aequale esse.

Jungantur

Jungantur enim BE, CH; et quoniam aequalis eſt BC ipſi FG, et
a. 34. 1. FG ipſi EH [a], erit et BC ipſi EH aequalis; ſuntque parallelae, et ipſas conjungunt BE, CH. quae autem aequales et parallelas ad eaſdem partes conjungunt, aequales et parallelae
b. 33. 1. ſunt [b]; ergo EB, CH et aequales ſunt et parallelae. parallelogrammum igitur
c. 35. 1. eſt EBCH, et aequale ipſi ABCD [c], baſim enim eandem habet BC, et in eiſdem parallelis BC, AD conſtituitur. ſimili ratione et EFGH parallelogrammum eidem EBCH eſt aequale. Ergo et parallelogrammum ABCD eſt aequale ipſi EFGH. Parallelogramma igitur ſuper aequalibus baſibus &c. Q. E. D.

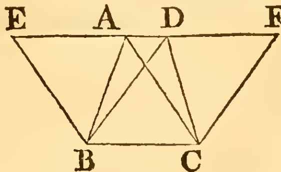


PROP. XXXVII. THEOR.

TRIANGULA ſuper eâdem baſi, et in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe aequalia ſunt.

Sint triangula ABC, DBC ſuper eadem baſi BC, et in eiſdem parallelis AD, BC conſtituta. dico ABC triangulum triangulo DBC aequale eſſe.

Producatur AD ex utraque parte in E, F puncta, et per B quidem ipſi CA parallela ducatur BE; per C vero
a. 31. 1. ipſi BD parallela ducatur CF [a]. Parallelogrammum igitur eſt utrumque ipſorum EBCA, DBCF; et parallelogrammum
b. 35. 1. EBCA eſt aequale ipſi DBCF [b]; etenim ſuper eâdem ſunt baſi BC, et in eiſdem parallelis BC, EF; eſtque parallelogrammi quidem EBCA dimidium
c. 34. 1. ABC triangulum [c], diameter enim AB ipſum bifariam ſecat; parallelogrammi



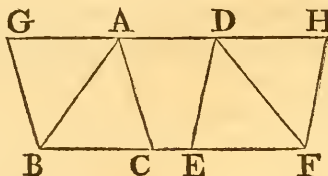
grammi vero DBCF dimidium triangulum DBC[c], ipſum enim bifariam ſecat diameter DC. aequalium autem dimidia inter ſe aequalia ſunt[d]; ergo triangulum ABC triangulo DBC eſt aequale. Triangula igitur ſuper eadem baſi &c. Q. E. D. c. 34. 1. d. Ax. 7.

PROP. XXXVIII. THEOR.

TRIANGULA ſuper baſibus aequalibus, et in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt aequalia.

Sint triangula ABC, DEF ſuper aequalibus baſibus BC, EF et in eiſdem parallelis BF, AD conſtituta. dico ABC triangulum DEF triangulo aequale eſſe.

Producatur enim AD ex utraque parte in G, H puncta, et per B quidem ipſi CA parallela ducatur BG, per F vero ducatur FH parallela ipſi ED[a]. parallelogrammum igitur eſt utrumque ipſorum GBCA, DEFH; atque eſt GBCA aequale ipſi DEFH[b]; ſuper aequalibus enim ſunt baſibus BC, EF et in eiſdem parallelis BF, GH; parallelogrammi vero GBCA dimidium eſt ABC triangulum, nam diameter AB ipſum bifariam ſecat; et parallelogrammi DEFH dimidium eſt triangulum DEF[c], diameter enim DF ipſum ſecat bifariam. aequalium autem dimidia inter ſe aequalia ſunt[d]; ergo ABC triangulum triangulo DEF eſt aequale. Triangula igitur ſuper aequalibus baſibus &c. Q. E. D. a. 31. 1. b. 36. 1. c. 34. 1. d. Ax. 7.

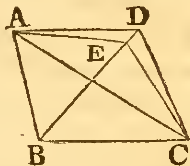


PROP. XXXIX. THEOR.

TRIANGULA aequalia ſuper eadem baſi, et ad eaſdem partes conſtituta, in eiſdem ſunt parallelis.

Sint aequalia triangula ABC, DBC ſuper eadem baſi BC conſtituta, et ad eaſdem partes; dico in eiſdem eſſe parallelis.

Jungatur enim AD, dico AD parallelam eſſe ipſi BC; ſi enim non
a. 31. 1. eſt, ducatur per A punctum ipſi BC parallela recta linea AE[a], et EC jungatur. aequale igitur eſt ABC triangulum tri-
b. 37. 1. angulo EBC[b], ſuper eadem enim eſt baſi BC, et in eiſdem parallelis BC, AE. ſed ABC triangulum triangulo DBC eſt aequale; ergo et triangulum DBC aequale eſt EBC triangulo, majus minori, quod fieri non poteſt. Non igitur AE ipſi BC parallela eſt. ſimiliter oſtendemus neque aliam quampiam parallelam eſſe, praeter ipſam AD; ergo AD ipſi BC eſt parallela. Triangula igitur aequalia &c. Q. E. D.

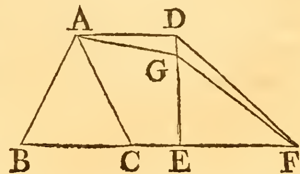


PROP. XL. THEOR.

TRIANGULA aequalia ſuper baſibus aequalibus, et ad eaſdem partes conſtituta, in eiſdem ſunt parallelis.

Sint aequalia triangula ABC, DEF ſuper aequalibus baſibus BC, EF conſtituta, et ad eaſdem partes; dico etiam in eiſdem eſſe parallelis.

Jungatur enim AD, dico AD ipſi BF parallelam eſſe. Nam ſi non eſt,



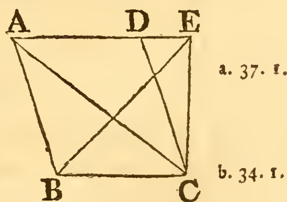
ducatur

ducatur per A ipſi BF parallela [a] AG, et GF jungatur. Triangulum a. 31. 1.
igitur ABC triangulo GEF eſt aequale[b], ſunt enim ſuper aequalibus b. 38. 1.
baſibus BC, EF, et in eiſdem parallelis BF, AG. ſed triangulum ABC aequale eſt triangulo DEF; ergo et triangulum DEF triangulo GEF aequale erit, majus minori, quod fieri non poteſt. non igitur AG ipſi BF eſt parallela. ſimiliter oſtendemus neque aliam quampiam parallelam eſſe, praeter AD. Ergo AD ipſi BF parallela eſt. Aequalia igitur triangula &c. Q. E. D.

PROP. XLI. THEOR.

SI parallelogrammum et triangulum eandem baſim habeant, in eiſdemque ſint parallelis; parallelogrammum ipſius trianguli duplum erit.

Parallelogrammum enim ABCD et triangulum EBC baſim habeant eandem BC, et in eiſdem ſint parallelis BC, AE; dico parallelogrammum ABCD trianguli EBC duplum eſſe.



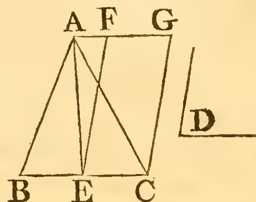
Jungatur enim AC; triangulum igitur ABC trianguolo EBC eſt aequale[a], etenim ſuper eâdem baſi BC, et in eiſdem ſunt parallelis BC, AE. a. 37. 1.
ſed ABCD parallelogrammum duplum eſt trianguli ABC[b], diameter enim AC ipſum bifariam b. 34. 1.
ſecat; quare et ABCD ipſius trianguli EBC duplum erit. ſi igitur parallelogrammum &c. Q. E. D.

PROP. XLII. PROB.

DATO triangulo aequale parallelogrammum, in angulo rectilineo dato angulo aequali, conſtituere.

Sit datum triangulum ABC, datus autem rectilineus angulus D. itaque oportet, dato triangulo ABC aequale parallelogrammum conſtituere in angulo rectilineo ipſi D aequali.

a. 10. 1. Secetur BC bifariam [a] in E, jungatur AE, et ad rectam lineam EC
b. 23. 1. atque ad punctum in ea E, conſtituatur angulus CEF aequalis ipſi D [b];
c. 31. 1. et per A quidem ipſi EC parallela ducatur AG [c], per C vero ipſi EF ducatur parallela CG [c]. parallelogrammum igitur eſt FECG. et quoniam BE eſt aequalis EC, erit et ABE triangulum trian-
d. 38. 1. gulo AEC aequale [d], ſuper aequalibus enim ſunt baſibus BE, EC, et in eiſdem BC, AG parallelis; ergo triangulum ABC trianguli AEC eſt duplum. eſt autem et parallelo-



e. 41. 1. grammum FECG duplum trianguli AEC [e], baſim enim eandem habet, et in eiſdem eſt parallelis. aequale igitur eſt FECG parallelogrammum triangulo ABC, habetque CEF angulum aequalem angulo D dato. Dato igitur triangulo ABC aequale parallelogrammum FECG conſtitutum eſt, in angulo CEF qui angulo D eſt aequalis. Q. E. F.

PROP. XLIII. THEOR.

OMNIS parallelogrammi ſpatii eorum, quae circa diametrum ſunt, parallelogrammorum complementa inter ſe ſunt aequalia.

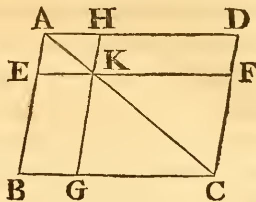
Sit parallelogrammum ABCD, cujus diameter AC, et circa ipſam AC parallelogramma quidem ſint EH, FG, quae vero complementa dicuntur BK, KD; dico BK complementum complemento KD aequale eſſe.

Quoniam enim parallelogrammum eſt ABCD, et ejus diameter AC,

aequale

aequale eſt ABC triangulum triangulo ADC[a]. rurſus quoniam EKHA parallelogrammum eſt, cujus diameter AK, triangulum AEK triangulo AHK aequale erit[a]. eadem ratione, et triangulum KGC triangulo KFC eſt aequale. Quoniam igitur triangulum quidem AEK aequale eſt triangulo AHK, triangulum vero KGC ipſi KFC; erit triangulum AEK una cum triangulo KGC aequale triangulo AHK una cum KFC triangulo. eſt autem et totum triangulum ABC aequale toti ADC[a]; reliquum igitur BK complementum reliquo complemento KD eſt aequale. Ergo omnis parallelogrammi &c. Q. E. D.

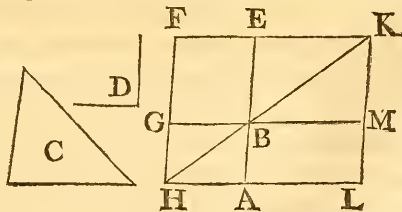
a. 34. 1.



PROP. XLIV. PROB.

AD datam rectam lineam, dato triangulo aequale parallelogrammum applicare, in angulo rectilineo dato angulo aequali.

Sit data quidem recta linea AB, datum vero triangulum C, et datus angulus rectilineus D. oportet igitur ad datam rectam lineam AB, dato triangulo C, aequale parallelogrammum applicare, in angulo ipſi D aequali.



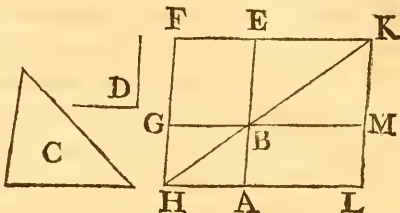
Conſtituatur triangulo C aequale parallelogrammum BEFG in angulo EBG qui aequalis eſt angulo D[a], et ponatur BE in directum ipſi AB, producaturque FG ad H; et per A alterutri ipſarum BG, EF parallela ducatur AH[b], et HB jungatur.

a. 42. 1.

b. 31. 1.

Quoniam

Quoniam igitur in parallelas AH, EF recta linea HF incidit, anguli
c. 29. 1. AHF, HFE duobus rectis aequales sunt[c]; quare BHF, HFE duobus rectis sunt minores. quae vero cum aliqua recta angulos interiores et ad easdem partes duobus rectis minores efficiunt, in infinitum produc-
d. Ax. 12. tae inter se convenient[d]. ergo HB, FE convenient; producantur, et conveniant in K, perque K alterutri ipsarum EA, FH parallela ducatur KL, et HA, GB ad L, M puncta producantur. parallelogrammum igitur est HLKF, cujus diameter HK, et circa HK parallelogramma quidem sunt AG, ME; ea vero quae complementa di-



e. 43. 1. cuntur LB, BF; ergo LB ipsi BF est aequale[e]. sed et BF est aequale triangulo C; quare et LB triangulo C aequale erit. et quoniam GBE
f. 15. 1. angulus aequalis est angulo ABM[f], sed et GBE aequalis angulo D; erit et angulus ABM angulo D aequalis. Ad datam igitur rectam lineam AB, dato triangulo C aequale parallelogrammum constitutum est LB, in angulo ABM qui est aequalis angulo D. Q. E. F.

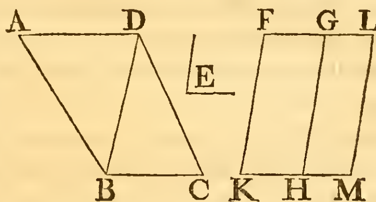
PROP. XLV. PROB.

RECTILINEO dato aequale parallelogrammum constituere in angulo rectilineo dato angulo aequali.

Sit datum rectilineum ABCD, datus vero angulus rectilineus E. oportet rectilineo ABCD aequale parallelogrammum constituere in angulo ipsi E aequali.

Jungatur enim DB, et constituatur triangulo ADB aequale paralle-
a. 42. 1. logrammum FH[a], in angulo HKF qui est aequalis angulo E; et ad rectam

rectam lineam GH applicetur triangulo DBC aequale parallelogrammum GM, in angulo GHM qui angulo E eſt aequalis[b]. et quoniam b. 44. 1.
angulus E aequalis eſt utrique ipſorum FKH, GHM, erit et FKH angulus aequalis ipſi GHM; communis apponatur KHG, anguli igitur FKH, KHG angulis KHG, GHM aequales ſunt. ſed FKH, KHG ſunt aequales duobus rectis[c]; ergo et KHG, GHM duobus rectis ae- c. 29. 1.
quales erunt. itaque quoniam ad aliquam rectam GH, et ad punctum in ea H duae rectae lineae KH, HM non ad eaſdem partes poſitae angulos deinceps duobus rectis aequales efficiunt, in directum erit KH ipſi HM[d]. et quoniam in parallelas KM, FG recta linea HG incidit, al- d. 14. 1.
terni anguli MHG, HGF aequales ſunt[e]; communis apponatur HGL; anguli igitur MHG, HGL, angulis HGF, HGL ſunt aequales. at anguli MHG, HGL aequales ſunt duobus rectis[c]; quare et anguli HGF, HGL duobus rectis aequales erunt; in directum igitur eſt FG ipſi GL. et quoniam KF ipſi HG eſt parallela, ſed et HG ipſi ML; erit KF ipſi ML parallela[e]. et parallelae ſunt KM, FL; parallelo- e. 30. 1.
grammum igitur eſt KFLM. et quoniam triangulum quidem ABD aequale eſt parallelogrammo HF, triangulum vero DBC parallelogrammo GM; erit totum ABCD rectilineum toti parallelogrammo KFLM aequale. Dato igitur rectilineo ABCD aequale parallelogrammum KFLM conſtitutum eſt in angulo FKM qui eſt aequalis angulo E dato. Q. E. F.



Cor. Ex jam dictis manifeſtum eſt, quomodo ad datam rectam lineam dato rectilineo aequale parallelogrammum applicari poſſit, in angulo rectilineo dato angulo aequali; ſi ſcilicet ad datam rectam lineam

applicetur[b]

b. 44. 1. applicetur [b] parallelogrammum aequale triangulo primo ABD, in angulo dato angulo aequali.

PROP. XLVI. PROB.

A Data recta linea quadratum describere.

Sit data recta linea AB; oportet ab ipsa AB quadratum describere.

Ducatur rectae lineae AB, a puncto A quod in ea est, ad rectos angu-
a. 11. 1. los [a] AC; et ipsi AB aequalis ponatur AD [b], perque punctum D duca-
b. 3. 1. c. 31. 1. tur DE ipsi AB parallela [c], et per B ipsi AD parallela ducatur [c] BE. parallelogrammum igitur est ADEB; quare AB
d. 34. 1. quidem est aequalis DE [d], AD vero ipsi BE [d]. sed BA ipsi AD est aequalis; quatuor igitur BA, AD, DE, EB inter se aequales sunt, ideoque aequilaterum est ADEB parallelogrammum. dico etiam rectangulum esse; quoniam enim in parallelas AB, DE recta linea incidit AD, anguli BAD,
e. 29. 1. ADE duobus rectis sunt aequales [e]; rectus autem est BAD, ergo et ADE rectus erit. parallelogrammorum autem spatiorum, quae ex opposito sunt latera, et anguli inter se aequalia sunt [d]; rectus igitur est uterque oppositorum angulorum ABE, BED; quare rectangulum est ADEB. ostensum autem est aequilaterum esse; quadratum igitur est, atque a recta linea AB descriptum. Q. E. F.

Cor. Hinc omne parallelogrammum habens unum angulum rectum est rectangulum.

C
D E
A B

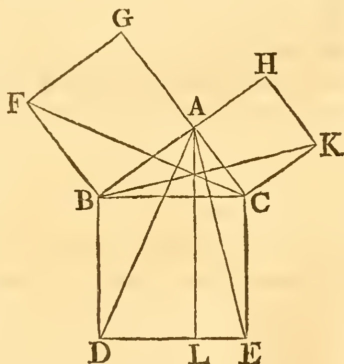
PROP. XLVII.

PROP. XLVII. THEOR.

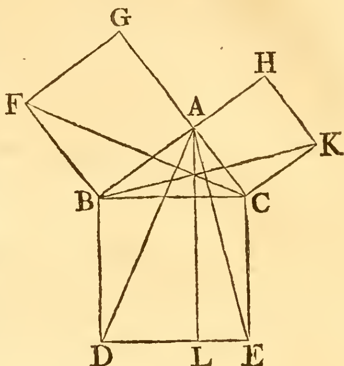
IN rectangulis triangulis, quod a latere rectum angulum ſubtendente deſcribitur, quadratum aequale eſt quadratis quae a lateribus rectum angulum continentibus deſcribuntur.

Sit triangulum rectangulum ABC, rectum habens BAC angulum; dico quadratum a recta BC aequale eſſe quadratis ab ipſis BA, AC deſcriptis.

Deſcribatur enim a BC quidem quadratum [a] BDEC, ab ipſis vero a. 46. 1.
BA, AC quadrata GB, HC; perque A alterutri ipſarum BD, CE parallela ducatur [b] AL, et AD, FC jungantur. Quoniam igitur uterque b. 31. 1.
angulorum BAC, BAG rectus eſt [c], c. Def. 30.
ad aliquam rectam lineam BA, et ad punctum in ea A duae rectae lineae AC, AG non ad eaſdem partes poſitae, angulos qui deinceps ſunt duobus rectis aequales efficiunt; in directum igitur eſt CA ipſi AG [d]. d. 14. 1.
eadem ratione, et AB ipſi AH eſt in directum. et quoniam angulus DBC eſt aequalis angulo FBA, rectus enim uterque eſt, communis apponatur ABC, totus igitur DBA angulus toti FBC eſt aequalis [e]. e. Ax. 2.
et quoniam duae AB, BD duabus FB, BC aequales ſunt, altera alteri, et angulus DBA aequalis angulo FBC; erit et baſis AD baſi FC aequalis, et ABD triangulum triangulo FBC aequale [f]. f. 4. 1.
eſtque trianguli quidem ABD duplum



g. 41. 1. BL parallelogrammum[g], basim enim eandem habent BD, et in eisdem sunt parallelis BD, AL; trianguli vero FBC duplum est GB quadratum, rursus enim basim habent eandem FB, et in eisdem sunt parallelis FB, GC. quae autem aequalium du-
h. Ax. 6. plicia inter se aequalia sunt[h]. aequale igitur est parallelogrammum BL ipsi GB quadrato. similiter junctis AE, BK ostendetur etiam CL parallelogrammum aequale quadrato HC. totum igitur BDEC quadratum duobus quadratis GB, HC est aequale. et descriptum quidem est BDEC quadratum a recta linea BC, quadrata vero GB, HC ab ipsis BA, AC. quadratum igitur BE a latere BC descriptum aequale est quadratis a lateribus, BA AC. Ergo in rectangulis triangulis &c. Q. E. D.



PROP. XLVIII. THEOR.

SI quadratum ab uno laterum trianguli, aequale sit quadratis a reliquis trianguli lateribus descriptis; angulus reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus erit.

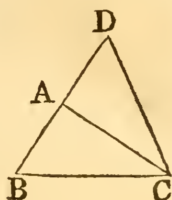
Quadratum enim ab uno latere BC trianguli ABC descriptum, aequale sit quadratis a reliquis trianguli lateribus BA, AC. dico angulum BAC rectum esse.

a. 11. 1. Ducatur[a] enim a puncto A ipsi AC ad rectos angulos AD, ponaturque AD ipsi BA aequalis, et DC jungatur. Quoniam igitur DA est aequalis AB, erit et quadratum ex DA aequale quadrato ex AB; com-

mune

mune apponatur quadratum ex AC, ergo quadrata ex DA, AC aequalia ſunt quadratis ex BA, AC. ſed quadratis quidem ex DA, AC aequale eſt quadratum ex DC[b], rectus enim angulus eſt DAC; quadratis vero ex BA, AC aequale ponitur quadratum ex BC; quadratum igitur ex DC aequale eſt quadrato ex BC; ergo et latus DC lateri CB eſt aequale. et quoniam DA eſt aequalis AB, communis autem AC, duae DA, AC aequales ſunt duabus BA, AC; et baſis DC eſt aequalis baſi BC; angulus igitur DAC angulo BAC eſt aequalis[c]. rectus autem eſt DAC, ergo et BAC rectus erit. ſi igitur quadratum &c. Q. E. D.

b. 47. 1.



c. 8. 1.

EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER SECUNDUS.

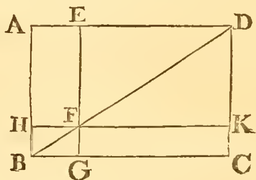
DEFINITIONES.

I.

OMNE parallelogrammum rectangulum contineri dicitur a duabus rectis lineis, quae rectum angulum continent.

II.

Omnis parallelogrammi ſpatii, unumquodvis eorum quae circa diametrum ipſius ſunt parallelogrammorum una cum duobus complementis, gnomon vocetur. 'Ita parallelogrammum 'HG una cum complementis AF, FC 'eſt gnomon, qui brevitatis gratia de-'ſignatur literis AGK vel EHC ad 'oppoſitos angulos parallelogrammorum qui gnomonem compo-'nunt.'

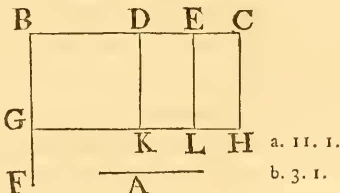


PROP. I.

PROP. I. THEOR.

SI ſint duae rectae lineae, altera autem ipſarum ſecta fuerit in quotcunque partes; rectangulum a duabus rectis lineis contentum aequale eſt rectangulis, quae a recta linea inſecta, et ſingulis partibus continentur.

Sint duae rectae lineae A, BC; et ſecta ſit BC utcunque in punctis D, E; dico rectangulum rectis lineis A, BC contentum aequale eſſe rectangulo contento ab ipſis A, BD; et ei ab ipſis A, DE; et adhuc ei ab ipſis A, EC contento.



Ducatur enim a puncto B ipſi BC ad rectos angulos BF[a], atque ipſi A ponatur aequalis BG[b]; et per G quidem ipſi BC parallela ducatur GH; per D, E, C vero ducantur DK, EL, CH parallelae ipſi BG[c]. rectangulum igitur BH eſt aequale rectangulis BK, DL, EH; atque eſt BH quidem quod ipſis A, BC continetur, etenim continetur a GB, BC, et BG ipſi A eſt aequalis; BK autem continetur ab ipſis A, BD, continetur enim a GB, BD, quarum GB eſt aequalis A; et DL eſt contentum ab ipſis A, DE, quoniam DK, hoc eſt BG[d] ipſi A eſt aequalis; et ſimiliter rectangulum EH contentum eſt ab ipſis A, EC. rectangulum igitur ab ipſis A, BC contentum eſt aequale rectangulo contento ab ipſis A, BD, et contento ab A, DE, et adhuc contento ab ipſis A, EC. ſi igitur ſint duae rectae lineae &c. Q. E. D.

a. 11. 1.
b. 3. 1.
c. 31. 1.
d. 34. 1.

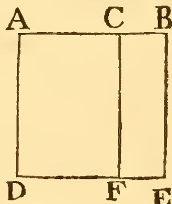
PROP. II.

PROP. II. THEOR.

SI recta linea secta fuerit utcunque, rectangula quae a tota et singulis partibus continentur, aequalia sunt quadrato ex tota.

Recta enim linea AB secta sit utcunque in puncto C; dico rectangulum ab AB, BC contentum, una cum rectangulo contento ab AB, AC aequale esse quadrato ex AB.

a. 46. 1. Describatur enim ex AB quadratum ADEB[a], et per C ducatur al-
b. 31. 1. terutri ipsarum AD, BE parallela CF[b]. aequale igitur est AE rectangulis AF, CE; atque est AE quidem quadratum ex AB; AF vero rectangulum a BA, AC contentum, etenim a DA, AC continetur, quarum AD ipsi AB est aequalis; et CE continetur ab ipsis AB, BC, aequalis enim est BE ipsi AB. rectangulum igitur ab AB, AC, una cum rectangulo ab ipsis AB, BC contento, aequale est quadrato ex AB. si igitur recta linea secta fuerit &c. Q. E. D.



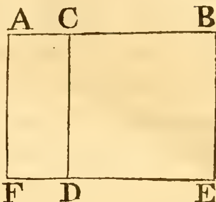
PROP. III. THEOR.

SI recta linea utcunque secta fuerit, rectangulum a tota et una ejus parte contentum aequale est et rectangulo a partibus contento, et quadrato ex praedictâ parte.

Recta enim linea AB secta sit utcunque in puncto C; dico rectangulum ab AB, BC contentum aequale esse rectangulo contento ab AC, CB una cum quadrato ex BC.

a. 46. 1. Describatur enim ex BC quadratum CDEB[a], et producatur ED in F, et

et per A alterutri ipsarum CD, BE, parallela ducatur AF[b]. aequale igitur est AE ipsis AD, CE; et est AE quidem rectangulum contentum ab AB, BC, etenim ab AB, BE continetur, quarum BE est aequalis BC; AD vero continetur ab ipsis AC, CB, aequalis enim est CD ipsi CB; et est DB quadratum ex BC. rectangulum igitur contentum ab AB, BC est aequale rectangulo contento ab ipsis AC, CB, una cum quadrato ex BC. si igitur recta linea &c. Q. E. D. b. 31. 1.

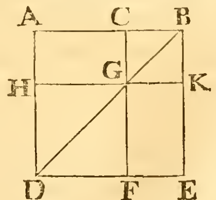


PROP. IV. THEOR.

SI recta linea secta fuerit utcunque, quadratum ex tota aequale est, et quadratis ex partibus, et rectangulo bis a partibus contento.

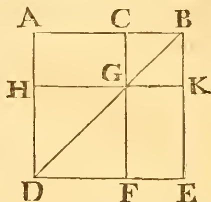
Recta enim linea AB secta sit utcunque in C; dico quadratum ex AB aequale esse, et quadratis ex AC, CB et rectangulo bis ab ipsis AC, CB contento.

Describatur enim ex AB quadratum ADEB[a], jungaturque BD, et per C quidem alterutri ipsarum AD, BE parallela ducatur CGF[b]; per G vero alterutri ipsarum AB, DE ducatur parallela HK[b]. et quoniam CF est parallela ipsi AD, et in ipsas incidit BD, erit exterior angulus BGC interiori et opposito ADB aequalis[c]; angulus autem ADB est aequalis angulo ABD[d], quoniam et latus BA aequale est lateri AD; quare CGB angulus angulo GBC est aequalis, ac propterea latus BC lateri CG aequale[e]. sed et latus CB aequale est lateri a. 46. 1. b. 31. 1. c. 29. 1. d. 5. 1. e. 6. 1.



teri

f. 34. 1. teri GK, et CG ipsi BK[f], ergo et GK est aequale KB; aequilaterum igitur est CGKB. dico insuper etiam rectangulum esse; quoniam enim CG parallela est ipsi BK, et in ipsas incidit CB, anguli KBC, GCB duobus rectis sunt aequales; rectus autem est KBC angulus, rectus igitur est GCB; quare et anguli hisce oppositi CGK, GKB recti erunt[f]; rectangulum igitur est CGKB. sed ostensum fuit et aequilaterum esse; quadratum igitur est, et est ex CB. eadem ratione et HF est quadratum, et est ex HG, hoc est ex AC. ergo HF, CK ex ipsis AC, CB quadrata sunt. et quoniam AG est aequale



g. 43. 1. ipsi GE[g], atque est AG quod ab AC, CB continetur, est enim GC ipsi CB aequalis; erit et GE aequale ei quod continetur ab AC, CB; quare AG, GE aequalia sunt ei quod bis ab AC, CB continetur. sunt autem et HF, CK quadrata ex AC, CB; quatuor igitur HF, CK, AG, GE aequalia sunt et quadratis ex AC, CB, et ei quod bis ab AC, CB continetur rectangulo. sed HF, CK, AG, GE sunt totum ADEB quod est quadratum ex AB. quadratum igitur ex AB aequale est et quadratis ex AC, CB, et rectangulo quod bis ab AC, CB continetur. si igitur recta linea secta fuerit &c. Q. E. D.

Cor. Ex his manifestum est, in quadratis spatiis parallelogramma quae sunt circa diametrum quadrata esse.

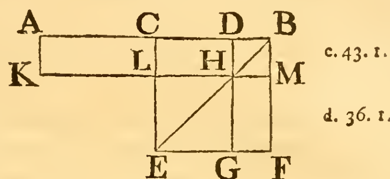
PROP. V. THEOR.

SI recta linea secta fuerit in partes aequales, et in partes inaequales; rectangulum ab inaequalibus totius partibus contentum, una cum quadrato rectae lineae quae inter sectiones interjicitur, aequale est quadrato ex dimidia.

Recta

Recta enim linea quaevis AB secta sit in partes aequales ad C, et in partes inaequales ad D; dico rectangulum contentum ab AD, DB una cum quadrato ex CD aequale esse quadrato ex CB.

Describatur enim ex BC quadratum [a] CEFB, jungaturque BE; et a. 46. 1. per D quidem alterutri ipsarum CE, BF parallela ducatur [b] DHG; per b. 31. 1. H vero ducatur KLM parallela alterutri ipsarum CB, EF; et rursus per A ducatur alterutri CL, BM parallela AK. et quoniam CH complementum aequale est complemento HF [c], commune apponatur DM, totum igitur CM toti DF est aequale; c. 43. 1. sed CM est aequale AL [d], quoniam et AC ipsi CB; ergo et AL aequale est DF. d. 36. 1. commune apponatur CH, totum igitur AH ipsis DF, CH aequale erit. sed AH quidem est quod continetur ab AD, DB, aequalis enim est DH ipsi DB [e]; DF, CH vero e. Cor. 4. 2. est gnomon CMG; gnomon igitur CMG aequalis est ei quod ab AD, DB continetur. commune apponatur LG, quod aequale est quadrato [e] ex CD; ergo CMG gnomon et LG aequalia sunt rectangulo ab AD, DB contento, et quadrato ex CD. sed CMG gnomon et LG sunt totum quadratum CEFB, quod fit ex CB. rectangulum igitur ipsis AD, DB contentum, una cum quadrato ex CD, aequale est quadrato ex CB. si igitur recta linea secta fuerit &c. Q. E. D.

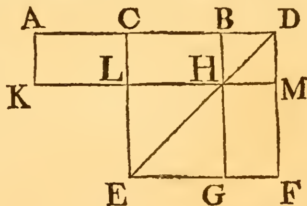


PROP. VI. THEOR.

SI recta linea bifariam secetur, atque ipsi in directum adjiciatur quaedam recta linea; rectangulum a tota cum adjecta, et ipsa adjecta contentum, una cum quadrato ex dimidia, aequale est quadrato quod ex ea quae composita est ex dimidia et adjecta, tanquam ab una recta linea, describitur.

Recta enim linea quaevis AB secetur bifariam in puncto C, et adjiciatur ipsi in directum quaedam BD; dico rectangulum ab AD, DB contentum una cum quadrato ex CB aequale esse quadrato ex CD.

a. 46. 1. Describatur enim ex CD quadratum [a] CEFD, et jungatur DE; per-
b. 31. 1. que B alterutri ipsarum CE, DF parallela ducatur [b] BHG, et per H ducatur KLM parallela alterutri ipsarum AD, EF, et adhuc per A alterutri CL, DM parallela AK. itaque quoniam AC est aequalis CB, erit et AL
c. 36. 1. rectangulum [c] ipsi CH aequale; sed CH
d. 43. 1. aequale est HF [d]; ergo et AL ipsi HF aequale erit. commune apponatur CM; totum igitur AM gnomoni CMG est aequale. atque est AM quod ab ipsis AD,
e. Cor. 4. 2. DB continetur, etenim DM est aequalis DB [e]. ergo et gnomon CMG aequalis est rectangulo ab AD, DB contento. commune apponatur LG, quod aequale est quadrato ex CB; rectangulum igitur ab AD, DB contentum una cum quadrato ex CB aequale est gnomoni CMG et ipsi LG. sed gnomon CMG et LG sunt totum quadratum CEFD, quod est ex CD; ergo rectangulum ab AD, DB contentum una cum quadrato ex CB aequale est quadrato ex CD. si igitur recta linea bifariam &c. Q. E. D.



PROP. VII.

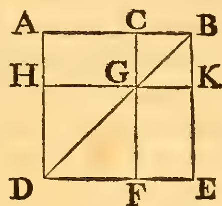
PROP. VII. THEOR.

SI recta linea utcunque ſecta fuerit, quae ex tota, et una parte fiunt utraque quadrata aequalia ſunt et rectangulo quod bis a tota ac dicta parte continetur, et quod ex reliqua parte fit quadrato.

Recta enim linea quaevis AB ſecta ſit utcunque in puncto C; dico quadrata ex AB, BC aequalia eſſe et rectangulo quod bis ab AB, BC continetur, et quadrato ex AC.

Deſcribatur enim ex AB quadratum ADEB[a], et figura conſtruatur. a. 46. 1.
et quoniam AG rectangulum aequale eſt ipſi GE[b], commune apponatur CK, quare totum AK toti CE eſt aequale; rectangula igitur AK, CE dupla ſunt ipſius AK. ſed AK, CE ſunt AKF gnomon et quadratum CK; gnomon igitur AKF et quadratum CK dupla ſunt rectanguli AK. eſt autem et id quod bis continetur ab AB, BC duplum ipſius AK, etenim BK eſt aequalis BC[c]. gnomon igitur AKF et quadratum CK aequalia ſunt ei quod bis ab AB, BC continetur. commune apponatur HF, quod eſt aequale quadrato ex AC; gnomon igitur AKF et quadrata CK, HF aequalia ſunt ei quod bis ab AB, BC continetur rectangulo, et quadrato ex AC. ſed gnomon AKF et quadrata CK, HF totum ſunt ADEB, et CK, quae ſunt ex AB, BC quadrata. Quadrata igitur ex AB, BC aequalia ſunt rectangulo quod bis ab AB, BC continetur, una cum quadrato ex AC. ſi igitur recta linea &c. Q. E. D.

b. 43. 1.



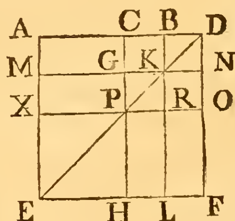
c. Cor. 4. 2.

PROP. VIII. THEOR.

SI recta linea utcunque secta fuerit, quod quater a tota et una parte continetur rectangulum una cum quadrato ex reliqua parte, aequale est quadrato quod ex tota et dicta parte, tanquam ex una recta, describitur.

Recta enim linea AB secta sit utcunque in C; dico rectangulum quater ab AB, BC contentum una cum quadrato ex AC aequale esse quadrato quod ex AB, BC tanquam ex una recta linea describitur.

Producatur enim in directum rectae lineae AB recta BD, et ipsi CB ponatur aequalis BD, describaturque ex AD quadratum AEFD; et dupla figura construatur. Quoniam igitur CB est aequalis BD, atque est
a. 34. 1. CB ipsi GK aequalis [a], BD vero ipsi KN; erit et GK aequalis KN. eadem ratione et PR ipsi RO est aequalis. et quoniam CB est aequalis BD, et GK ipsi KN, erit rectangulum quidem CK aequale
b. 36. 1. ipsi BN, GR vero ipsi RN [b]: sed CK est
c. 43. 1. aequale RN [c]. complementa enim sunt parallelogrammi CO; ergo et BN aequale est GR. quatuor igitur BN, CK, GR, RN sunt inter se aequalia, ideoque quadrupla sunt ipsius CK. rursus quoniam CB est aequalis
d. Cor. 4. 2. BD, et BD quidem ipsi BK [d], hoc est ipsi CG aequalis; CB vero ipsi GK, hoc est GP [d]; erit et CG aequalis GP. et quoniam CG quidem aequalis est GP, PR vero ipsi RO, aequale erit et AG quidem rectangulum ipsi MP; PL vero ipsi RF. sed MP est aequale [c] PL, complementa enim sunt parallelogrammi ML; quare et AG ipsi RF est aequale. quatuor igitur AG, MP, PL, RF inter se aequalia sunt; ac propterea

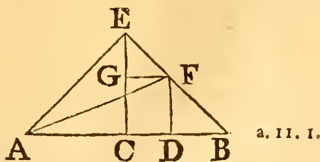


terea ipſius AG quadrupla. oſtenſum autem eſt, et quatuor CK, BN, GR, RN quadrupla eſſe ipſius CK. octo igitur quae continent gnomonem AOH ipſius AK quadrupla ſunt. et quoniam AK eſt quod ab AB, BC continetur, etenim BK eſt aequalis BC; erit contentum quater ab AB, BC ipſius AK quadruplum. at oſtenſus eſt gnomon AOH quadruplus ipſius AK; quod igitur quater ab AB, BC continetur aequale eſt gnomoni AOH. commune apponatur XH, quod aequale eſt quadrato ex AC [d]; erit rectangulum quod quater ab AB, BC continetur d. Cor. 4. 2.
una cum quadrato ex AC aequale ipſi AOH gnomoni, et quadrato XH. ſed AOH gnomon et XH totum ſunt AEFD quadratum, quod eſt ex AD. rectangulum igitur quater ab AB, BC contentum una cum quadrato ex AC aequale eſt ei quod ex AD, hoc eſt ex AB, BC tanquam ex una recta linea, deſcribitur quadrato. ſi igitur recta linea utcunque &c. Q. E. D.

PROP. IX. THEOR.

SI recta linea in partes aequales, et in partes inaequales ſecta fuerit; quadrata ex inaequalibus totius partibus, dupla ſunt et quadrati ex dimidia, et quadrati ex eâ quae inter ſectiones interjicitur.

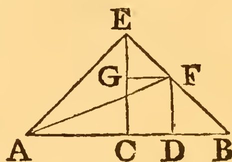
Recta enim linea quaevis AB ſecta ſit in partes quidem aequales ad C, in partes vero inaequales ad D. dico quadrata ex AD, DB quadratorum ex AC, CD dupla eſſe.



Ducatur enim a puncto C ipſi AB ad rectos angulos CE [a], et alterutri ipſarum AC, CB aequalis ponatur, junganturque EA, EB; ac per D quidem ipſi CE parallela ducatur [b] DF, per F vero ipſi

a. 11. 1.
b. 31. 1.

b. 31. 1. ipſi AB parallela [b] FG; et AF jungatur. itaque quoniam AC eſt aequalis CE, erit et angulus EAC angulo AEC aequalis[c]; et quoniam rectus eſt angulus ad C, reliqui AEC, EAC uni recto aequales erunt[d]; et ſunt inter ſe aequales; uterque igitur ipſorum AEC, EAC recti eſt dimidium. eadem ratione et recti dimidium eſt uterque ipſorum CEB, EBC; totus igitur angulus AEB rectus eſt. et quoniam angulus GEF dimidium eſt recti, rectus autem EGF, aequalis enim eſt interiori et oppoſito [e] ECB, erit reliquus EFG recti dimidium; aequalis igitur eſt GEF angulus ipſi EFG, quare et latus EG lateri GF eſt aequale[f]. rurſus quoniam angulus ad B dimidium eſt recti, rectus autem FDB, rurſus enim aequalis eſt interiori et oppoſito [e] ECB, reliquus BFD recti erit dimidium; angulus igitur ad B aequalis eſt angulo BFD, ideoque latus DF lateri DB aequale [f]. et quoniam AC eſt aequalis CE, erit et ex AC quadratum aequale quadrato ex CE; quadrata igitur ex AC, CE dupla ſunt quadrati ex AC. quadratis autem ex AC, CE aequale eſt quadratum ex EA [g], ſiquidem rectus eſt angulus ACE; ergo quadratum ex EA quadrati ex AC eſt duplum. rurſus quoniam EG aequalis eſt GF, erit et quadratum ex EG quadrato ex GF aequale; quadrata igitur ex EG, GF dupla ſunt quadrati ex GF; quadratis vero ex EG, GF aequale eſt quadratum ex EF; ergo quadratum ex EF quadrati ex GF duplum erit. aequalis [h] autem eſt GF ipſi CD; quadratum igitur ex EF duplum eſt quadrati ex CD. ſed et quadratum ex AE quadrati ex AC eſt duplum; quadrata igitur ex AE, EF dupla ſunt quadratorum ex AC, CD. quadratis vero ex AE, EF aequale eſt ex AF quadratum [g], quoniam angulus AEF rectus eſt; quadratum igitur ex AF quadratorum ex AC, CD eſt duplum. ſed quadrato ex AF aequalia ſunt quadrata ex AD, DF, rectus enim eſt angulus



c. 5. 1.
d. 32. 1.
e. 29. 1.
f. 6. 1.
g. 47. 1.
h. 34. 1.

gulus

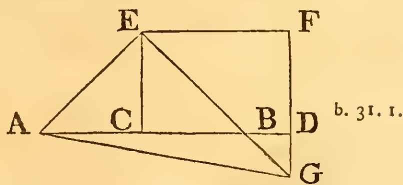
gulus qui ad D; ergo ex AD, DF quadrata dupla ſunt quadratorum ex AC, CD. eſt autem DF ipſi DB aequalis; quadrata igitur ex AD, DB quadratorum ex AC, CD dupla erunt. ſi igitur recta linea ſecetur &c. Q. E. D.

PROP. X. THEOR.

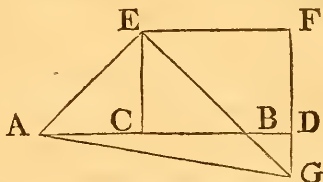
SI recta linea ſecetur bifariam, et ipſi in directum quaevis recta linea adjiciatur, quae ex tota cum adjecta, et adjecta fiunt utraque quadrata, dupla ſunt et quadrati ex dimidia, et quadrati quod ex ea quae compoſita eſt ex dimidia et adjecta, tanquam ab una recta linea deſcribitur.

Recta enim linea AB ſecetur bifariam in C, et ipſi in directum adjiciatur quaevis recta linea BD; dico quadrata ex AD, DB quadratorum ex AC, CD dupla eſſe.

Ducatur enim a puncto C ipſi AB ad rectos angulos [a] CE, et alteru- a. 11. 1.
tri ipſarum AC, CB aequalis ponatur, junganturque AE, EB; et per E quidem ipſi AB parallela ducatur [b] EF, per D vero ducatur DF b. 31. 1.
parallela [b] ipſi CE. et quoniam in parallelas EC, FD recta quaedam linea EF incidit, anguli CEF, EFD aequales ſunt duobus rectis [c]; an- c. 29. 1.
guli igitur BEF, EFD duobus rectis ſunt minores. quae vero cum aliqua recta angulos duobus rectis minores efficiunt, in infinitum productae inter ſe conveniunt [d]. ergo EB, FD productae ad partes BD d. Ax. 12.
convenient; producantur, et conveniant in G, et AG jungatur. itaque quoniam AC eſt aequalis CE, erit et angulus CEA angulo EAC aequalis [e];



e. 5. 1. qualis[e]; atque eſt rectus qui ad C; uterque igitur ipſorum CEA, EAC eſt recti dimidium. eadem ratione, et recti dimidium eſt uterque CEB, EBC; ergo AEB eſt rectus. et quoniam EBC eſt dimidium recti, erit
f. 15. 1. et recti dimidium DBG[f]; ſed et BDG rectus eſt, etenim eſt aequalis
c. 29. 1. ipſi DCE alterno[c]; reliquus igitur DGB dimidium eſt recti; eſt igitur
g. 6. 1. DGB ipſi DBG aequalis, ergo et latus BD aequale lateri DG[g]. rurſus quoniam EGF eſt dimidium recti, rectus autem qui ad F, eſt enim
h. 34. 1. angulo oppoſito ad C aequalis[h], erit et reliquus FEG recti dimidium; eſt igitur angulus EGF aequalis ipſi FEG, quare et latus GF lateri FE eſt aequale[g]. et quoniam EC eſt aequalis CA, erit et quadratum ex EC aequale quadrato ex CA; ergo quadrata ex EC, CA dupla ſunt quadrati ex CA. quadratis autem ex EC, CA aequale eſt quadratum ex
i. 47. 1. EA[i]; quadratum igitur ex EA quadrati ex AC eſt duplum. rurſus quoniam GF eſt aequalis FE, erit et ex GF quadratum aequale quadrato ex FE; quadrata igitur ex GF, FE quadrati ex EF ſunt dupla. at quadratis ex GF, FE aequale eſt quadratum ex EG[i]; ergo quadratum ex EG duplum eſt quadrati ex EF. aequalis autem eſt EF ipſi CD, quadratum igitur ex EG quadrati ex CD duplum erit. ſed oſtenſum eſt quadratum ex EA duplum quadrati ex AC; ergo ex AE, EG quadrata, quadratorum ex AC, CD ſunt dupla. quadratis vero ex AE, EG aequale eſt quadratum ex AG[i]; quadratum igitur ex AG duplum eſt quadratorum ex AC, CD. at quadrato ex AG aequalia ſunt quadrata ex AD, DG[i]; ergo quadrata ex AD, DG ſunt dupla quadratorum ex AC, CD. ſed DG eſt aequalis DB; quadrata igitur ex AD, DB quadratorum ex AC, CD ſunt dupla. ſi igitur recta linea ſecetur &c. Q. E. D.



PROP. XI.

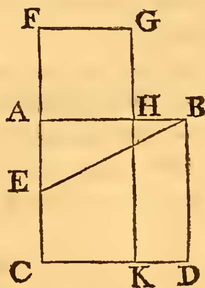
PROP. XI. PROB.

DATAM rectam lineam secare ita ut rectangulum a tota et altera parte contentum, aequale sit quadrato ex reliqua parte.

Sit data recta linea AB; oportet ipsam AB ita secare, ut rectangulum contentum a tota et altera parte aequale sit quadrato ex reliqua parte.

Describatur enim ex AB quadratum [a] ABDC, seceturque AC bifariam [b] in E, et BE jungatur, et producatur CA in F, ponaturque ipsi BE aequalis EF [c], et ex AF describatur quadratum FGHA [a], et GH ad K producatur. dico AB sectam esse in H, ita ut rectangulum ab AB, BH contentum aequale sit quadrato ex AH.

a. 46. 1.
b. 10. 1.
c. 3. 1.



Quoniam enim recta linea AC bifariam secta est in E, et ipsi in directum adjecta est AF, rectangulum a CF, FA contentum, una cum quadrato ex AE, aequale erit quadrato ex EF [d]. sed EF est aequalis EB; rectangulum igitur contentum ab ipsis CF, FA, una cum quadrato ex AE aequale est quadrato ex EB. quadrato autem ex EB aequalia sunt quadrata ex BA, AE [e], etenim angulus ad A rectus est; ergo rectangulum a CF, FA, una cum quadrato ex AE aequale est quadratis ex BA, AE. commune auferatur quadratum ex AE; reliquum igitur rectangulum a CF, FA contentum aequale est quadrato ex AB. et FK quidem est rectangulum a CF, FA contentum, aequalis enim est AF ipsi FG; AD vero est quadratum ex AB. aequale igitur est FK ipsi AD. commune auferatur AK; ergo reliquum

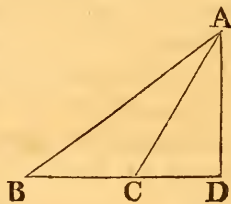
d. 6. 2.
e. 47. 1.

FH reliquo HD eſt aequale. et eſt HD quidem rectangulum ab AB, BH, eſt enim AB aequalis ipſi BD; FH vero eſt quadratum ex AH. rectangulum igitur contentum ab AB, BH quadrato ex AH aequale erit. quare data recta linea AB ſecta eſt in H, ita ut contentum ab AB, BH rectangulum quadrato ex AH ſit aequale. Q. E. F.

PROP. XII. THEOR.

IN obtuſangulis triangulis quadratum ex latere obtuſum angulum ſubtendente, majus eſt quam quadrata ex lateribus obtuſum angulum continentibus, rectangulo contento bis ab uno laterum quae ſunt circa obtuſum angulum in quod productum perpendicularis cadit, et recta linea intercepta exterius a perpendiculari ad angulum obtuſum.

Sit obtuſangulum triangulum ABC, obtuſum angulum habens ACB,
a. 12. 1. et ducatur a puncto A ad BC productam perpendicularis [a] AD. dico quadratum ex AB majus eſſe quam quadrata ex AC, CB, rectangulo bis a BC, CD contento.



Quoniam enim recta linea BD ſecta eſt utcunque in puncto C, erit quadratum ex BD aequale quadratis ex BC, CD, et rec-
b. 4. 2. tangulo bis ab ipſis BC, CD contento [b]. commune apponatur quadratum ex DA; quadrata igitur ex BD, DA aequalia ſunt et quadratis ex BC, CD, DA, et rectangulo bis a BC, CD contento. ſed quadratis quidem ex BD, DA aequale eſt quadratum ex
c. 47. 1. BA [c], rectus enim eſt angulus ad D; quadratis vero ex CD, DA aequale eſt quadratum ex CA [c]. Quadratum igitur ex BA aequale eſt et quadratis

quadratis ex BC, CA et contento bis a BC, CD rectangulo; itaque quadratum ex BA majus est quam quadrata ex BC, CA, rectangulo bis ab ipsis BC, CD contento. In obtusangulis igitur triangulis &c. Q. E. D.

PROP. XIII. THEOR.

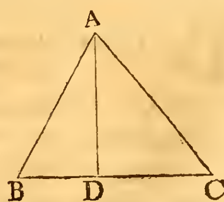
IN omni triangulo, quadratum ex latere acutum angulum subtendente, minus est quam quadrata ex lateribus angulum illum acutum continentibus, rectangulo contento bis ab uno laterum quae sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, et recta linea intercepta a perpendiculari ad angulum acutum.

Sit triangulum ABC, acutum habens angulum ad B, et ducatur a puncto A ad BC perpendicularis [a] AD. dico quadratum ex AC minus esse quam quadrata ex CB, BA, rectangulo bis a CB, BD contento. a. 12. 1.

Cadat primo AD intra triangulum ABC; et quoniam recta linea CB secta est utcunque in D, erunt quadrata ex CB, BD aequalia et rectangulo bis a CB, BD contento, et quadrato ex DC [b]. commune apponatur ex AD quadratum; quadrata igitur ex CB, BD, DA aequalia sunt et rectangulo bis ab ipsis CB, BD contento, et quadratis ex AD, DC. sed quadratis quidem ex BD, DA aequale est ex AB quadratum [c], rectus enim angulus est qui ad D; quadratis vero ex AD, DC aequale est quadratum ex AC. quadrata igitur ex CB, BA sunt aequalia quadrato ex AC, et contento bis a CB, BD rectangulo; itaque solum quadratum ex AC minus est quam quadrata ex CB, BA rectangulo bis a CB, BD contento.

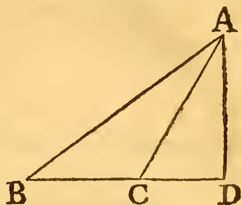
b. 7. 2.

c. 47. 1.



Sed cadat AD extra triangulum ABC. quoniam igitur rectus est angulus ad D, erit angulus ACB major recto[d]; quadratum igitur ex AB aequale est et quadratis ex AC, CB, et rectangulo bis ab ipsis BC, CD contento[e]. commune apponatur ex BC quadratum; erunt igitur quadrata ex AB, BC aequalia quadrato ex AC, quadrato ex BC bis, et contento bis a BC, CD rectangulo. quoniam autem recta linea BD secta est utcunque in C, rectangulum a DB, BC contentum aequale est rectangulo a BC, CD et quadrato ex BC[f], et ipsorum dupla sunt aequalia. quadrata igitur ex AB, BC aequalia sunt quadrato ex AC, et rectangulo bis a DB, BC contento. solum igitur quadratum ex AC minus est quadratis ex AB, BC rectangulo bis contento ab ipsis CB, BD.

d. 16. 1.
e. 12. 2.
f. 3. 2.



Denique sit latus AC perpendiculare ad ipsum BC; est igitur BC recta ab AC ad angulum acutum B intercepta, et manifestum est quadrata ex AB, BC aequalia esse quadrato ex AC, et bis quadrato ex BC[c]. In omni igitur triangulo &c. Q. E. D.

c. 47. 1.



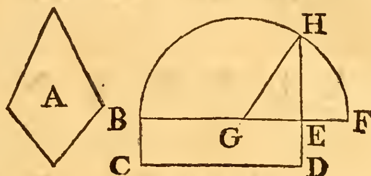
PROP. XIV. PROB.

DATO rectilineo aequale quadratum constituere.

Sit datum rectilineum A; oportet ipsi A rectilineo aequale quadratum constituere.

a. 45. 1. Constituatur rectilineo A aequale parallelogrammum rectangulum[a] BCDE. si igitur BE est aequalis ED, factum jam erit quod proponebatur; etenim rectilineo A aequale quadratum constitutum est BD. sin minus, producatur BE ad F, ponaturque ipsi ED aequalis EF, et secetur

tur BF bifariam in G; et centro quidem G, intervallo vero uni ipſarum GB, GF aequali ſemicirculus deſcribatur BHF, producaturque DE in H, et GH jungatur. Quoniam igitur recta linea BF ſecta eſt in partes quidem aequales ad G, in partes vero inaequales ad E, erit rectangulum a BE, EF contentum, una cum quadrato ex EG aequale quadrato ex GF [b]. eſt autem GF aequalis GH; rectangulum igitur a BE, EF, una cum quadrato ex EG aequale eſt quadrato ex GH. ſed quadrato ex GH aequalia ſunt ex HE, EG quadrata [c]. rectangulum igitur a BE, EF, una cum quadrato ex EG aequale eſt quadratis ex HE, EG. commune auferatur ex EG quadratum; reliquum igitur rectangulum a BE, EF contentum eſt aequale quadrato ex EH. ſed contentum a BE, EF eſt ipſum BD, quoniam EF eſt aequalis ED; ergo BD parallelogrammum quadrato ex EH eſt aequale. eſt autem BD aequale rectilineo A; rectilineum igitur A quadrato ex EH deſcripto aequale erit. Dato igitur rectilineo A aequale quadratum conſtitutum eſt, ex ipſa videlicet EH deſcriptum. Q. E. F.



b. 5. 2.

c. 47. 1.

EUCLIDIS

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER TERTIUS.

DEFINITIONES.

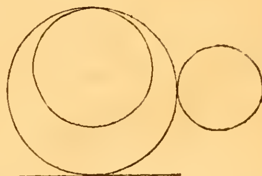
I.

AEQUALES circuli ſunt, quorum diametri ſunt aequales, vel quorum quae ex centris ſunt aequales.

'Haec non eſt definitio ſed Theorema cujus veritas patet; ſi enim 'circuli, quorum quae ex centris ſunt aequales, ſibi mutuo applicentur 'ita ut centra eorum congruant, congruent et ipſi circuli.'

II.

Recta linea circulum contingere dicitur, quae tangens circulum et producta ipſum non ſecat.

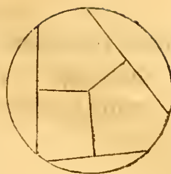


III.

Circuli contingere ſeſe dicuntur, qui tangentes ſe mutuo, ſe ipſos non ſecant.

In

IV.



In circulo aequaliter diſtare a centro rectae lineae dicuntur, quando a centro ad ipſas perpendiculares ductae ſunt aequales.

V.

Magis autem diſtare a centro dicitur ea in quam major perpendicularis cadit.

VI.

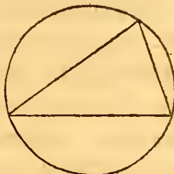


Segmentum circuli eſt figura, quae recta linea et circuli circumferentia continetur.

VII.

" Segmenti autem angulus eſt, qui recta linea et circuli circumferen-
" tia continetur."

VIII.

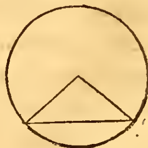


In ſegmento angulus eſt, quando in circumferentia ſegmenti ſumitur aliquod punctum, atque ab ipſo ad extrema rectae lineae quae baſis eſt ſegmenti, rectae lineae ducuntur, angulus rectis ductis contentus.

IX.

Quando autem continentes angulum rectae lineae aſſumunt circumferentiam, illi inſiſtere angulus dicitur.

X.



Sector circuli eſt, quando angulus ad centrum conſtiterit, figura contenta rectis lineis quae angulum continent, et circumferentia ab ipſis aſſumpta.

Similia

XI.

Similia circulorum ſegmenta ſunt, quae angulos capiunt aequales, vel in quibus anguli ſunt inter ſe aequales.



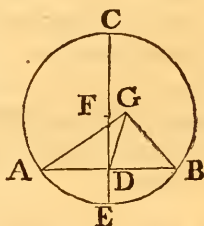
PROP. I. PROB.

DATI circuli centrum invenire.

Sit datus circulus ABC; oportet circuli ABC centrum invenire.

Ducatur in ipſo quaedam recta linea AB utcunque, et in puncto D bi-
a. 10. 1. fariam ſecetur[a], a puncto autem D ipſi AB ad rectos angulos ducatur
b. 11. 1. DC,[b], et ad E producatur, et ſecetur CE bifariam in F. dico punctum F centrum eſſe circuli ABC.

Non enim; ſed ſi fieri poteſt ſit G centrum, et jungantur GA, GD, GB. itaque quoniam DA eſt aequalis DB, communis autem DG, erunt duae AD, DG duabus BD, DG aequales, altera alteri, et baſis GA aequalis eſt baſi GB, ſunt enim ex centro G; angulus igitur ADG
c. 8. 1. angulo GDB eſt aequalis[c]. cum autem recta linea ſuper rectam lineam inſiſtens angulos qui
d. 10. Def. 1. deinceps ſunt aequales inter ſe fecerit, rectus[d] eſt uterque aequalium angulorum; ergo angulus GDB eſt rectus. ſed et rectus eſt FDB; aequalis igitur eſt angulus FDB angulo GDB, major minori, quod fieri non poteſt. quare G non eſt circuli ABC centrum. ſimiliter oſtendemus neque aliud eſſe praeter ipſum F. ergo F centrum eſt circuli ABC. Quod erat inveniendum.



Cor.

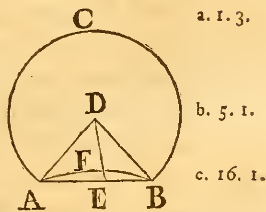
Cor. Ex hoc manifeſtum eſt, ſi in circulo recta linea, rectam lineam bifariam et ad angulos rectos ſecet, in ſecante erit centrum circuli.

PROP. II. THEOR.

SI in circumferentia circuli duo quaevis puncta ſumantur, quae ipſa conjungit recta linea intra circulum cadet.

Sit circulus ABC, et in circumferentia ipſius ſumantur duo quaevis puncta A, B; dico rectam lineam a puncto A ad B ductam, intra circulum cadere.

Non enim, ſed ſi fieri poteſt cadat extra ut AEB; et ſumatur circuli ABC centrum[a], et ſit D, junganturque AD, a. 1.3.
DB, occurratque DE circumferentiae in F. Quoniam igitur DA eſt aequalis DB, erit et angulus DAB aequalis [b] angulo DBA; et quoniam trian- b. 5.1.
guli DAE unum latus AEB producitur, erit angulus DEB angulo DAE major[c]; angulus autem c. 16.1.
DAE aequalis eſt angulo DBE, ergo DEB angulus angulo DBE eſt major. ſed majori angulo majus latus ſubtenditur[d]; d. 19.1.
major igitur eſt DB ipſa DE. aequalis autem eſt DB ipſi DF; ergo DF eſt major DE, minor majore, quod fieri non poteſt. recta igitur linea a puncto A ducta ad B non cadet extra circulum. ſimiliter oſtendemus neque in ipſam cadere circumferentiam. cadet igitur intus. ſi igitur in circumferentia &c. Q. E. D.

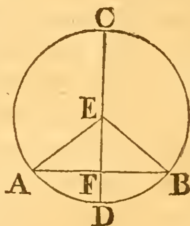


PROP. III. THEOR.

SI in circulo recta linea per centrum ducta, rectam lineam quandam non ductam per centrum bifariam secet; et ad angulos rectos ipsam secabit. quod si ad angulos rectos ipsam secet, et bifariam secabit.

Sit circulus ABC, et in ipso recta linea per centrum ducta CD rectam lineam quandam AB non ductam per centrum bifariam secet in puncto F. dico et ad angulos rectos ipsam secare.

a. 1. 3. Sumatur enim circuli ABC centrum[a], et sit E, et EA, EB jungantur. Quoniam igitur AF est aequalis FB, communis autem FE, duae AF, FE duabus BF, FE aequales sunt, et basis EA basi EB est aequalis; ergo et angulus AFE angulo BFE ae-
b. 8. 1. qualis erit[b]. cum autem recta linea super rectam insistens, angulos qui deinceps sunt, aequales inter se fecerit, rectus est uterque aequalium an-
c. Def. 10. 1. gulorum[c]. uterque igitur AFE, BFE est rectus; quare recta linea CD per centrum ducta rectam lineam AB non ductam per centrum bifariam secans, et ad angulos rectos ipsam secabit.



Sed secet CD ipsam AB ad rectos angulos, dico et bifariam ipsam secare, hoc est AF ipsi FB aequalem esse.

Iisdem enim constructis, quoniam EA quae ex centro est aequalis
d. 5. 1. EB, et angulus EAF angulo EBF aequalis erit[d]; est autem et AFE rectus aequalis recto BFE. duo igitur triangula sunt EAF, EBF quae duos angulos duobus angulis aequales habent, unumque latus uni lateri aequale, EF commune scilicet utrisque, quod uni aequalium angulorum subtenditur; ergo et reliqua latera reliquis lateribus aequalia habebunt[e].

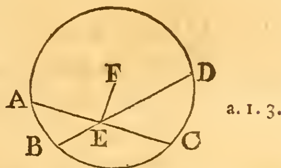
bebunt[e]. aequalis igitur eſt AF ipſi FB. ſi igitur in circulo recta linea &c. Q. E. D. e. 26. 1.

PROP. IV. THEOR.

SI in circulo duae rectae lineae non ductae per centrum ſe invicem ſecent, ſeſe bifariam non ſecabunt.

Sit circulus ABCD, et in ipſo duae rectae lineae AC, BD ſe invicem ſecent in puncto E, non ductae per centrum. dico eas ſeſe bifariam non ſecare.

Si enim fieri poteſt, ſecent ſeſe bifariam, ita ut AE ſit aequalis EC, et BE ipſi ED. ſi igitur una rectarum per centrum tranſit, manifeſtum eſt eam non poſſe bifariam ſecari ab altera quae non tranſit per centrum. ſi vero neutra ipſarum per centrum tranſit, ſumatur centrum ABCD circuli[a], et ſit F, et EF jungatur. Quoniam igitur recta linea FE per centrum ducta rectam lineam AC non ductam per centrum bifariam ſecat, et ad rectos angulos ipſam ſecabit[b]; quare rectus eſt FEA angulus. rurſus quoniam recta linea FE rectam lineam BD non ductam per centrum bifariam ſecat, et ad angulos rectos ipſam ſecabit[b]; rectus igitur angulus eſt FEB. oſtenſus autem eſt rectus et FEA; ergo FEA angulus ipſi FEB aequalis erit, minor majori, quod fieri non poteſt. non igitur AC, BD ſeſe bifariam ſecant. ſi igitur in circulo &c. Q. E. D.



a. 1. 3.

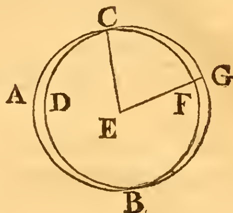
b. 3. 3.

PROP. V. THEOR.

SI duo circuli ſe invicem ſecent, non erit ipſorum idem centrum.

Duo enim circuli ABC, CDG se invicem secent in punctis B, C. dico ipsorum idem centrum non esse.

Si enim fieri potest, sit centrum E; jungaturque EC, et EFG utcunque ducatur. et quoniam E centrum est circuli ABC, erit CE ipsi EF aequalis. rursus quoniam E centrum est CDG circuli, aequalis est CE ipsi EG. sed ostensa est CE aequalis EF; ergo FE ipsi EG aequalis erit, minor majori, quod fieri non potest. non igitur punctum E centrum est circulorum ABC, CDG. si igitur duo circuli &c. Q. E. D.

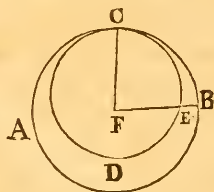


PROP. VI. THEOR.

SI duo circuli sese intra contingant, ipsorum idem centrum non erit.

Duo enim circuli ABC, CDE contingant sese intra in puncto C. dico ipsorum non esse idem centrum.

Si enim fieri potest, sit F; jungaturque FC, et FEB utcunque ducatur. Quoniam igitur F centrum est circuli ABC, aequalis est CF ipsi FB. rursus quoniam F centrum est circuli CDE, erit CF aequalis FE. ostensa autem est CF aequalis FB; ergo et FE ipsi FB est aequalis, minor majori, quod fieri non potest. non igitur F punctum centrum est circulorum ABC, CDE. si igitur duo circuli &c. Q. E. D.



PROP. VII.

PROP. VII. THEOR.

SI in circuli diametro aliquod punctum sumatur quod non sit centrum circuli, et ab eo in circumferentiam cadant quaevis rectae lineae; maxima quidem erit in qua centrum, minima vero reliqua; aliarum autem propinquior ei quae per centrum transit semper remotiore major est. at duae tantum aequales ab eodem puncto in circumferentiam cadent ad utrasque partes minimae.

Sit circulus ABCD, diameter autem ejus AD, et in ipsa AD sumatur aliquod punctum F quod non sit centrum circuli; sit autem centrum circuli E, et a puncto F in circumferentiam ABCD cadant quaedam rectae lineae FB, FC, FG. dico FA maximam esse, et FD minimam; reliquarum autem, FB quidem majorem quam FC, FC vero majorem quam FG.



Jungantur enim BE, CE, GE; et quoniam omnis trianguli duo latera reliquo sunt majora[a], erunt BE, EF majores quam BF; est autem AE aequalis BE, ergo BE, EF ipsi AF sunt aequales; major igitur est AF quam FB. rursus quoniam BE est aequalis CE, communis autem FE; duae BE, EF duabus CE, EF aequales sunt; sed BEF angulus major est angulo CEF, basis igitur BF basi FC est major[b]. eadem ratione et CF major est quam FG. rursus quoniam GF, FE majores sunt quam EG[a], aequalis autem EG ipsi ED, erunt GF, FE majores quam ED. communis auferatur FE; ergo reliqua GF major est quam reliqua FD. maxima igitur est FA, et FD minima; major vero BF quam FC, et FC quam FG.

a. 20. 1.

b. 24. 1.

Dico

Dico et a puncto F duas tantum rectas lineas aequales cadere in circumferentiam ABCD ad utrasque partes minimae FD. constituatur enim ad rectam lineam EF, et ad punctum



c. 23. 1. in ea E, angulo GEF aequalis angulus [c] FEH, et FH jungatur. Quoniam igitur GE est aequalis EH, communis autem EF, duae GE, EF duabus HE, EF aequales sunt; et angulus GEF est aequalis angulo HEF; basis igi-

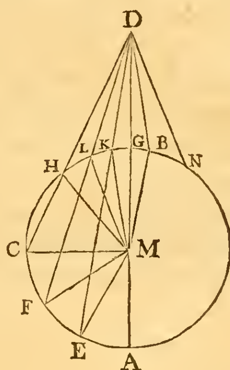
d. 4. 1. tur FG basi FH aequalis erit [d]. dico a puncto F ad circumferentiam non cadere aliam ipsi FG aequalem. si enim fieri potest, cadat FK, et quoniam FK est aequalis FG, estque ipsi FG aequalis FH, erit et FK ipsi FH aequalis, videlicet propinquior ei quae per centrum transit aequalis remotiori; quod fieri non potest. si igitur in circuli &c. Q. E. D.

PROP. VIII. THEOR.

SI extra circulum aliquod punctum sumatur, atque ab eo ad circumferentiam ducantur quaedam rectae lineae, quarum una per centrum transeat, reliquae vero utcunque; earum quidem quae in concavam circumferentiam cadunt, maxima est quae per centrum transit; aliarum autem propinquior ei quae per centrum, semper remotiore major est. at earum quae in convexam circumferentiam cadunt, minima est quae inter punctum et diametrum interjicitur; aliarum vero quae propinquior minimae, semper remotiore est minor. duae autem tantum aequales a puncto in circumferentiam cadunt ad utrasque partes minimae.

Sit

Sit circulus ABC, et extra circulum ſumatur aliquod punctum D; ab eo autem ad circumferentiam ducantur rectae lineae quaedam DA, DE, DF, DC, ſitque DA per centrum. dico earum quidem quae in concavam circumferentiam AEFC cadunt maximam eſſe DA quae per centrum tranſit; et quae propinquior eſt ei quae per centrum ſemper major erit remotiore, videlicet DE quidem quam DF, DF vero quam DC: earum vero quae in convexam circumferentiam HLKG cadunt, minimam eſſe DG quae inter punctum D et diametrum AG interjicitur, et quae propinquior minimae ſemper eſt minor remotiore, videlicet DK quam DL, et DL quam DH.



Sumatur enim centrum circuli [a] ABC, quod ſit M, et jungantur ME, MF, MC, MK, ML, MH. et quoniam AM eſt aequalis ME, communis apponatur MD, ergo AD eſt aequalis ipſis EM, MD; ſed EM, MD ſunt majores quam ED[b], ergo et AD quam ED eſt major. rurſus quoniam aequalis eſt ME ipſi MF, communis autem MD, erunt EM, MD ipſis FM, MD aequales; at angulus EMD major eſt angulo FMD, baſis igitur ED baſi FD major erit[c]. ſimiliter oſtendemus et FD majorem eſſe quam CD. ergo maxima eſt DA; major autem DE quam DF, et DF quam DC. et quoniam MK, KD ſunt majores quam MD[b], et MK eſt aequalis MG, erit reliqua KD quam reliqua GD major[d], quare GD minor quam KD; minima igitur eſt GD. et quoniam ſuper trianguli MLD uno latere MD, duae rectae lineae MK, KD intra conſtituuntur, erunt MK, KD minores ipſis ML, LD[e], quarum MK eſt aequalis ML; reliqua igitur DK minor eſt quam reliqua DL. ſimiliter oſtendemus,

a. 1. 3.

b. 20. 1.

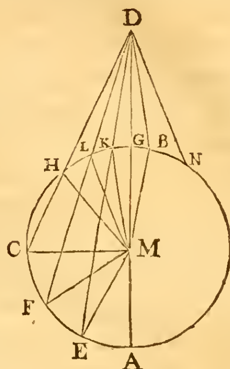
c. 24. 1.

d. Ax. 4.

e. 21. 1.

mus, et DL quam DH minorem esse. ergo DG minima est, minor vero DK quam DL, et DL quam DH. dico etiam duas tantum aequales a puncto D in circumferentiam cadere ad utrasque minimae partes. constituatur ad rectam lineam MD, et ad punctum in ea M, angulo KMD aequalis angulus DMB, et DB jungatur. itaque quoniam MK est aequalis MB, communis autem MD, duae KM, MD duabus BM, MD aequales sunt, altera alteri, et angulus KMD aequalis angulo BMD;

f. 4. 1. basis igitur DK basi DB est aequalis[f]. dico autem a puncto D aliam ipsi DK aequalem in circumferentiam non cadere. si enim fieri potest, cadat DN; et quoniam DK est aequalis DN, et DK ipsi DB est aequalis, erit et DB aequalis DN, propinquior scilicet minimae aequalis remotiori, quod fieri non posse ostensum est. si igitur extra circulum &c. Q. E. D.



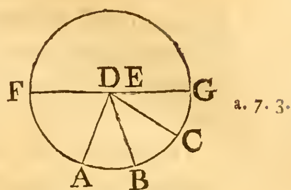
PROP. IX. THEOR.

SI intra circulum sumatur aliquod punctum, atque ab eo ad circumferentiam cadant plures quam duae rectae lineae aequales; punctum quod sumitur circuli centrum erit.

Sumatur enim intra circulum ABC punctum aliquod D, atque a puncto D ad circumferentiam cadant plures quam duae rectae lineae aequales DA, DB, DC. dico punctum D centrum esse circuli ABC.

Non enim; sed si fieri potest, sit E centrum, et juncta DE ad puncta

puncta F, G producatur; ergo FG diameter est circuli ABC. itaque quoniam in FG diametro circuli ABC sumptum est aliquod punctum D quod non est centrum circuli, maxima quidem erit DG, major autem DC quam DB, et DB quam DA[a]. sed et aequales, quod fieri non potest; non igitur E centrum est circuli ABC. similiter ostendemus neque aliud punctum centrum esse praeter ipsum D; est igitur D centrum circuli ABC. si igitur intra circulum &c. Q. E. D.

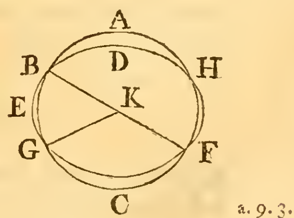


a. 7. 3.

PROP. X. THEOR.

CIRCULUS circulum in pluribus quam duobus punctis non secat. ' N. B. Hoc de ipsorum circumferentiis ' intelligendum est.'

Si enim fieri potest, circulus ABC circulum DEF secet in pluribus punctis quam duobus, nempe in B, G, F, et circuli ABC centrum sumatur K, et KB, KG, KF jungantur. Quoniam igitur intra circulum DEF sumptum est aliquod punctum K, et ab ipso K in circumferentiam DEF incidant plures quam duae rectae lineae aequales KB, KG, KF, erit punctum K circuli DEF centrum[a]. est autem et K circuli ABC centrum; duorum igitur circulorum qui sese secant idem est centrum, quod fieri non potest[b]. quare circulus circulum in pluribus quam duobus punctis non secat. Q. E. D.



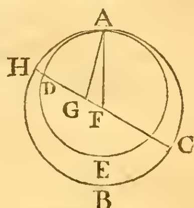
a. 9. 3.

b. 5. 3.

PROP. XI. THEOR.

SI duo circuli ſeſe intus contingant, et ſumantur centra ipſorum; recta linea ipſorum centra conjungens producta in circulorum contactum cadet.

Duo enim circuli ABC, ADE ſeſe intus contingant in puncto A, et ſumatur circuli quidem ABC centrum F, circuli vero ADE centrum G. dico rectam lineam conjungentem puncta G, F, ſi producatur, in punctum A cadere.



Non enim; ſed ſi fieri poteſt, cadat ut FGDH, et AF, AG jungantur. itaque quoniam AG,
a. 20. 1. GF majores ſunt quam FA [a] hoc eſt quam FH, (eſt enim FA aequalis ipſi FH, nam ab eodem ſunt centro) communis auferatur FG, reliqua igitur AG major eſt quam reliqua GH. ſed AG eſt aequalis GD, ergo GD ipsâ GH eſt major, minor majore, quod fieri non poteſt. non igitur puncta F, G conjungens recta linea extra contactum A cadet. cadet igitur in ipſum. ſi igitur duo circuli &c. Q. E. D.

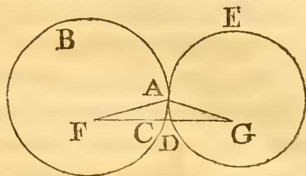
PROP. XII. THEOR.

SI duo circuli ſeſe extra contingant, recta linea ipſorum centra conjungens per contactum tranſibit.

Duo enim circuli ABC, ADE ſeſe extra contingant in puncto A; et ſumatur circuli quidem ABC centrum F, circuli vero ADE centrum G. dico rectam lineam puncta F, G conjungentem per contactum A tranſire.

Non

Non enim, ſed, ſi fieri poteſt, cadat ut FCDG, et FA, AG jungantur. quoniam igitur F centrum eſt circuli ABC, erit AF aequalis FC. rurſus quoniam G centrum eſt ADE circuli, erit AG ipſi GD aequalis. ſunt igitur FA, AG ipſis FC, DG aequales; ergo tota FG major eſt quam FA, AG. ſed et minor[a]; quod fieri non poteſt. non igitur a. 20. 1.

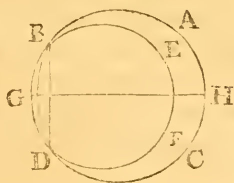


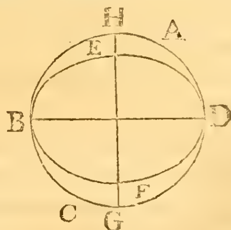
puncta F, G conjungens recta linea per contactum non tranſibit. per ipſum igitur tranſit. ſi igitur duo circuli &c. Q. E. D.

PROP. XIII. THEOR.

CIRCULUS circulum non contingit in pluribus punctis quam uno, ſive intus ſive extra contingat.

Si enim fieri poteſt, circulum ABC circulus EBFc ontingat primùm intus in pluribus punctis quam uno, videlicet in B, D; jungatur BD, et ducatur * GH bifariam et ad rectos angulos ſecans ipſam BD. Quoniam * 10, 11. 1.



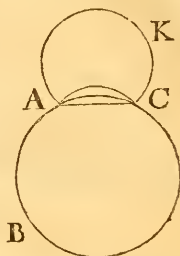


igitur puncta B, D ſunt in circumferentia utriuſque circuli, recta BD cadet intra utrumque circulum[a]. igitur in recta GH quae ipſam BD bifariam et ad rectos angulos ſecat, erit utriuſque circuli centrum[b]; ergo GH a. 2. 3. b. Cor. 1. 3.

 producta

c. 11. 3. producta cadet in circulorum contactum[c]; sed, in contactum non cadit, quia B, D puncta sunt extra rectam GH, quod est absurdum. non igitur circulus circulum intus contingit in pluribus punctis quam uno.

Dico etiam neque extra contingere; si enim fieri potest circulum ABC contingat circulus AKC in pluribus punctis quam uno, videlicet in A, C, et AC jungatur. itaque quoniam in circumferentia circuli AKC sumpta sunt duo puncta A, C recta linea AC
a. 2. 3. quae ipsa conjungit intra circulum AKC cadet[a]. est autem circulus AKC extra circulum ABC, quare recta AC est extra ABC circulum; quoniam vero A, C puncta sunt in circumferentia ipsius ABC circuli, recta AC est intra [a] eundem, quod est absurdum. non igitur circulus circulum extra contingit in pluribus punctis quam uno. ostensum autem est neque intus. circulus igitur circulum non contingit in pluribus punctis quam uno, sive intus sive extra contingit. Q. E. D.



PROP. XIV. THEOR.

IN circulo aequales rectae lineae aequaliter a centro distant; et quae aequaliter a centro distant sunt inter se aequales.

Sit circulus ABDC, et in ipso aequales sint rectae lineae AB, CD. dico eas a centro aequaliter distare.

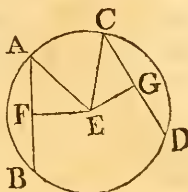
Sumatur enim circuli ABDC centrum, sitque E, et ab ipso ad AB, CD perpendiculares ducantur EF, EG, et AE, EC jungantur. Quoniam igitur recta linea quaedam EF per centrum ducta rectam lineam AB non ductam per centrum ad rectos angulos secat, et ipsam bifariam

riam ſecabit[a]. quare AF eſt aequalis FB, ideoque AB dupla eſt ipſius AF. eadem ratione, et CD dupla eſt CG. atque eſt AB ipſi CD aequalis; aequalis igitur et AF ipſi CG. et quoniam AE eſt aequalis EC, erit et quadratum ex AE quadrato ex EC aequale.. ſed quadrato quidem ex AE aequalia ſunt ex AF, FE quadrata[b], rectus enim eſt angulus ad F; quadrato vero ex EC aequalia ſunt quadrata ex EG, GC, rectus eſt enim angulus ad G. quadrata igitur ex AF, FE aequalia ſunt quadratis ex CG, GE, quorum quadratum ex AF eſt aequale quadrato ex CG, etenim aequalis eſt AF ipſi CG; reliquum igitur ex FE aequale eſt reliquo quadrato ex EG, quare recta FE ipſi EG eſt aequalis. in circulo autem aequaliter a centro diſtare rectae lineae dicuntur, quando a centro ad ipſas perpendiculares ductae aequales ſunt[c]. igitur AB, CD a centro aequaliter diſtant.

a. 3. 3.

b. 47. 1.

c. 4. Def. 3.



Sed AB, CD aequaliter diſtent a centro, hoc eſt, aequalis ſit FE ipſi EG; dico AB ipſi CD aequalem eſſe. iiſdem enim conſtructis, ſimiliter oſtendemus AB quidem duplam eſſe ipſius AF, CD vero ipſius CG. et quoniam aequalis eſt AE ipſi EC, erit et ex AE quadratum quadrato ex EC aequale. ſed quadrato quidem ex AE aequalia ſunt [b] quadrata ex EF, FA, quadrato vero ex EC aequalia [b] quadrata ex EG, GC; quadrata igitur ex EF, FA quadratis ex EG, GC aequalia ſunt; quorum quadratum ex FE aequale eſt quadrato ex EG, eſt enim FE ipſi EG aequalis; reliquum igitur ex AF quadratum aequale eſt reliquo ex CG; eſt igitur recta linea AF aequalis ipſi CG. et eſt AB quidem dupla ipſius AF, CD vero dupla ipſius CG; aequalis igitur eſt AB ipſi CD. in circulo igitur aequales rectae lineae &c. Q. E. D.

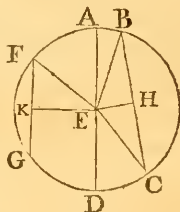
PROP. XV.

PROP. XV. THEOR.

IN circulo maxima quidem eſt diameter; aliarum vero ſemper propinquior centro remotiore major eſt; et quae major eſt, propinquior erit centro minore.

Sit circulus ABCD, cujus diameter AD, centrum vero E; et propinquior quidem centro ſit BC, remotior autem FG. dico AD maximam eſſe, et BC majorem quam FG.

Ducantur enim a centro ad BC, FG perpendiculares EH, EK, et EB, EC, EF jungantur. Quoniam igitur aequalis eſt AE ipſi EB, et ED ipſi EC, erit AD aequalis ipſis BE, EC. ſed
a. 20. 1. BE, EC majores ſunt quam BC [a], quare et AD quam BC major erit.



Et quoniam BC propinquior eſt centro, remo-
b. 5. Def. 3. tior vero FG, erit EK major quam EH [b]. eſt autem, ut in praecedente oſtenſum fuit, BC dupla ipſius BH, et FG dupla ipſius FK, et quadrata ex EH, HB aequalia quadratis ex EK, KF, quorum quadratum ex EH minus eſt quadrato ex EK, minor enim eſt EH ipsâ EK; reliquum igitur quadratum ex BH reliquo ex FK majus erit, quare recta BH major erit ipsâ FK; et propterea BC erit major quam FG.

Sed ſit BC major quam FG, erit BC propinquior centro quam FG, hoc eſt, iiſdem conſtructis, erit EH minor quam EK. Quoniam enim BC major eſt quam FG, erit et BH major quam FK. quadrata autem ex BH, HE aequalia ſunt quadratis ex FK, KE, quorum ex BH quadratum quadrato ex FK eſt majus, eſt enim BH major quam FK; reliquum igitur quadratum ex EH reliquo ex EK minus erit, et recta linea EH minor erit quam EK. in circulo igitur &c. Q. E. D.

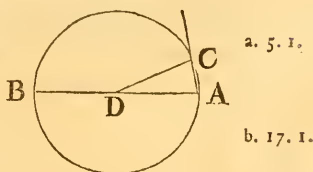
PROP. XVI.

PROP. XVI. THEOR.

QUAE diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducta est, cadit extra circulum; et in locum inter rectam lineam et circumferentiam recta linea non cadet; sive, quod idem est, circumferentia circuli transit inter rectam quae diametro est ad rectos angulos, et rectam quae cum diametro angulum acutum quantumvis magnum continet, vel quae angulum quantumvis parvum continet cum recta quae ad rectos angulos est diametro.

Sit circulus ABC circa centrum D, et diametrum AB; dico rectam lineam, quae ab extremitate A diametri ipsi AB ad rectos angulos ducta est, extra circulum cadere.

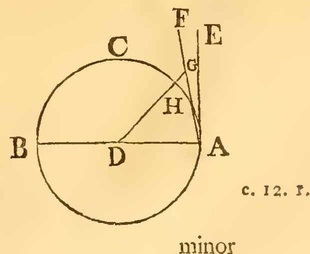
Non enim; sed, si fieri potest, cadat intus ut AC, et DC jungatur. Quoniam igitur aequalis est DA ipsi DC, erit et angulus DAC angulo ACD aequalis[a]; rectus autem est DAC, rectus igitur est ACD; quare anguli DAC, ACD duobus rectis aequales sunt; quod fieri non potest[b]. non igitur a puncto A ipsi BA ad rectos angulos ducta cadet intra circulum. similiter ostendemus neque in circumferentiam cadere; extra igitur cadet, ut AE, in figura sequente.



a. 5. 1.

b. 17. 1.

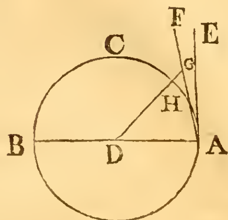
Dico in locum inter rectam lineam AE et circumferentiam ABC rectam lineam non cadere. si enim fieri potest, cadat ut FA, et a puncto D ad FA perpendicularis ducatur[c] DHG. et quoniam rectus est angulus AGD,



c. 12. 1.

minor

b. 17. 1. d. 19. 1. minor autem recto DAG[b], erit DA quam DG major[d]. aequalis autem est DA ipsi DH; major igitur est DH ipsa DG, minor majore, quod fieri non potest. non igitur in locum inter rectam lineam et circumferentiam, recta linea cadet. sive, quod idem est, circumferentia circuli transit inter rectam quae diametro est ad rectos angulos, et rectam quae cum diametro angulum acutum quantumvis magnum continet, vel quae angulum quantumvis parvum continet cum recta quae ad rectos angulos est diametro. 'Et hoc, nihil vero aliud, intelligendum est quando in textu 'Graeco et versionibus, semicirculi angulus dicitur major omni angulo 'acuto, et reliquus minor.'



Cor. Ex his manifestum est rectam lineam quae ab extremitate diametri circuli eidem ad rectos angulos ducta est, circulum contingere; et rectam lineam contingere circulum in uno tantum puncto, quoniam quae
e. 2. 3. occurrit in duobus punctis intra ipsum cadere ostensa est[e]. 'Et praeter'ea, unicam tantum rectam posse circulum in eodem puncto contin'gere.'

PROP. XVII. PROB.

A Dato puncto extra circulum, vel in ejus circumferentia, rectam lineam ducere quae datum circulum contingat.

Primo, sit datum punctum A extra datum circulum BCD. oportet a puncto A rectam lineam ducere quae datum circulum contingat.

a. 1. 3. Sumatur enim centrum circuli E[a], et AE jungatur; et centro quidem E, intervallo autem EA circulus AFG describatur; et a puncto D

ipsi

ipſi EA ad rectos angulos ducatur [b] DF, junganturque EBF, AB. dico a puncto A ductam eſſe AB quae circulum BCD contingit. b. 11. 1.

Quoniam enim E centrum eſt circulorum BCD, AFG, erit EA aequalis EF, et ED ipſi EB; duae igitur AE, EB duabus FE, ED aequales ſunt, et angulum communem ad E continent; ergo baſis DF baſi AB eſt aequalis, triangulumque EDF aequale triangulo EBA, et reliqui anguli reliquis angulis [c]. aequalis igitur eſt angulus EBA angulo EDF. rectus autem eſt EDF, rectus igitur eſt EBA. atque eſt EB ex centro; quae autem diametro circuli ab extremitate ad rectos angulos ducta eſt, circulum contingit [d]. contingit igitur AB circulum. c. 4. 1. d. Cor. 16. 3.

‘ Sit autem datum punctum in circumferentia circuli, ut punctum D, ‘ et ad centrum E ducatur DE, et a puncto D, ipſi DE ad rectos an- ‘ gulos ducatur [b] DF; continget [d] haec circulum.’ A dato igitur puncto ducta eſt recta linea quae datum circulum contingit. Q. E. F.

PROP. XVIII. THEOR.

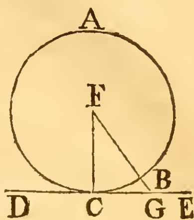
SI circulum contingat quaedam recta linea, a centro autem ad tactum recta linea ducatur, ducta ad contingentem perpendicularis erit.

Circulum enim ABC contingat quaedam recta linea DE in puncto C, et circuli ABC ſumatur centrum F, et ab F ad C ducatur FC; dico FC ad ipſam DE perpendicularem eſſe.

Si enim non ſit, ducatur a puncto F ad DE

 perpendicularis [a]

a. 12. 1. perpendicularis [a] FBG. Quoniam igitur angulus FGC rectus est, erit b. 17. 1. GCF acutus [b]; majorem autem angulum ma- c. 19. 1. jus latus subtendit [c]. major igitur est FC quam FG; aequalis autem FC ipsi FB; major igitur est FB ipsâ FG, minor majore, quod fieri non potest. non igitur FG est perpendicularis ad DE. similiter ostendemus neque aliam quampiam praeter ipsam FC. est igitur FC perpendicularis ad DE. si igitur circulum contingat &c. Q. E. D.

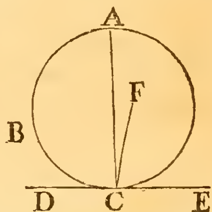


PROP. XIX. THEOR.

SI circulum contingat quaedam recta linea, a tactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea ducatur; in ducta erit centrum circuli.

Circulum enim ABC contingat quaedam recta linea DE in C, et a C ipsi DE ad rectos angulos ducatur CA; dico in ipsa CA centrum circuli esse.

Non enim; sed, si fieri potest, sit F centrum, et jungatur CF. quoniam igitur circulum ABC contingit quaedam recta linea DE, et a centro ad tactum ducta est FC, erit FC ad ipsam DE perpendi- a. 18. 3. cularis [a]; rectus igitur angulus est FCE. est autem et ACE rectus; angulus igitur FCE est aequalis ipsi ACE, minor majori, quod fieri non potest. non igitur F centrum est circuli ABC. similiter ostendemus neque aliud aliquod esse praeterquam in ipsa CA, centrum igitur est in CA. quare si circulum contingat &c. Q. E. D.

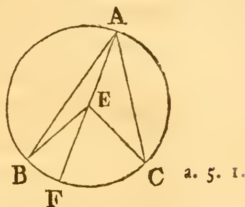


PROP. XX.

PROP. XX. THEOR.

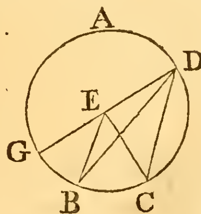
IN circulo angulus qui ad centrum duplus eſt ejus qui ad circumferentiam, quando circumferentiam eandem pro baſi habent.

Sit circulus ABC, et ad centrum quidem ejus ſit angulus BEC, ad circumferentiam vero BAC, habeant autem eandem circumferentiam BC pro baſi; dico BEC angulum anguli BAC duplum eſſe.



Primo, ſit centrum E intra angulum BAC, et jungatur AE et ad F producatur. quoniam igitur EA eſt aequalis EB, erit et angulus EAB angulo EBA aequalis[a]; anguli igitur EAB, EBA dupli ſunt ipſius EAB; ſed angulus BEF eſt aequalis angulis EAB, EBA[b]; ergo et angulus BEF ipſius EAB eſt duplus. eadem ratione et angulus FEC duplus eſt ipſius EAC. totus igitur BEC totius BAC duplus erit.

a. 5. 1.
b. 32. 1.

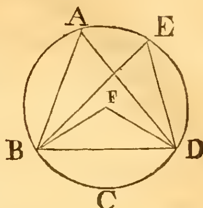


Rurſus inflectatur BDC ad circumferentiam, ita ut centrum E ſit extra angulum BDC, junctaque DE ad G producatur. ſimiliter oſtendemus angulum GEC anguli GDC duplum eſſe, quorum GEB duplus eſt ipſius GDB; reliquus igitur BEC reliqui BDC eſt duplus. in circulo igitur angulus &c. Q. E. D.

PROP. XXI. THEOR.

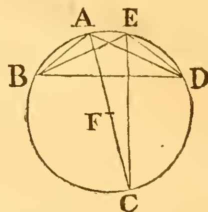
IN circulo qui in eodem ſegmento ſunt anguli inter ſe aequales ſunt.

Sit circulus ABCD, et in eodem ſegmento BAED anguli ſint BAD, BED; dico eos inter ſe aequales eſſe.



Sumatur enim circuli ABCD centrum, ſitque F. et primo, ſit BAED ſegmentum majus ſemicirculo, et jungantur BF, FD. et quoniam angulus quidem BFD eſt ad centrum, angulus vero BAD ad circumferentiam, et circumferentiam eandem BCD pro baſi habent, erit BFD angu-
a. 20. 3. lus anguli BAD duplus[a]. eadem ratione angulus BFD duplus eſt etiam anguli BED. angulus igitur BAD angulo BED aequalis erit.

Sit vero ſegmentum BAED non majus ſemicirculo, et in ipſo ſint anguli BAD, BED, erunt hi inter ſe aequales. ad centrum enim F ducatur AF, et producatur ad C, et CE jungatur. ſegmentum igitur BAEC majus eſt ſemicirculo, quare anguli in eo BAC, BEC ſunt inter ſe aequales. eadem ratione aequales inter ſe ſunt anguli CAD, CED. totus igitur angulus BAD toti BED eſt aequalis. in circulo igitur qui in eodem ſegmento ſunt anguli, inter ſe aequales ſunt. Q. E. D.



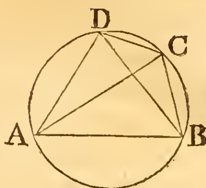
PROP. XXII. THEOR.

QUADRILATERORUM quae in circulis ſunt, anguli oppoſiti ſunt duobus rectis aequales.

Sit circulus ABCD, et in ipſo quadrilaterum ABCD; dico angulos ipſius oppoſitos duobus rectis aequales eſſe.

Jungantur AC, BD; quoniam igitur omnis trianguli tres anguli
a. 32. 1. duobus rectis ſunt aequales[a], erunt trianguli ABC tres anguli CAB, ABC,

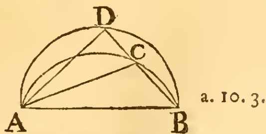
ABC, BCA aequales duobus rectis. aequalis [b] autem est angulus CAB b. 21. 3. angulo CDB, in eodem enim sunt segmento BADC; angulus vero ACB aequalis est ipsi ADB, sunt enim in eodem segmento ADCB. totus igitur ADC angulis BAC, ACB aequalis est. communis apponatur ABC angulus; anguli igitur ABC, CAB, BCA angulis ABC, ADC sunt aequales. sed ABC, CAB, BCA sunt duobus rectis aequales; ergo et anguli ABC, ADC duobus rectis aequales erunt. similiter ostendemus angulos quoque BAD, DCB duobus rectis esse aequales. quadrilaterorum igitur quae in circulis sunt &c. Q. E. D.



PROP. XXIII. THEOR.

SUPER eadem recta linea duo circulorum segmenta similia, et non sibi mutuo congruentia, ex eadem parte non constituentur.

Si enim fieri potest, super eadem recta linea AB duo circulorum segmenta ACB, ADB similia, et sibi mutuo non congruentia, ex eadem parte constituantur. quoniam igitur circulus ACB circulum ADB secat in duobus punctis A, B, idem eundem non secabit in alio puncto [a]. necesse igitur est ut unum segmentum cadat intra alterum; a. 10. 3. cadat ACB intra ipsum ADB, et ducatur recta linea BCD, junganturque CA, DA. itaque quoniam segmentum ACB simile est segmento ADB, similia autem circulorum segmenta sunt quae angulos capiunt aequales [b]; erit ACB angulus aequalis angulo ADB, b. 11. Def. 3. exterior interiori, quod fieri non potest [c]. non igitur super eadem recta c. 16. 1. linea,



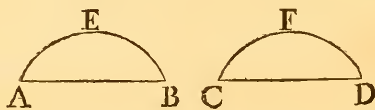
linea, duo circulorum ſegmenta, ſimilia, et ſibi mutuo non congruentia, ex eadem parte conſtituentur. Q. E. D.

PROP. XXIV. THEOR.

SUPER aequalibus rectis lineis ſimilia circulorum ſegmenta inter ſe aequalia ſunt.

Sint enim ſuper aequalibus rectis lineis AB, CD ſimilia circulorum ſegmenta AEB, CFD; dico ſegmentum AEB ſegmento CFD aequale eſſe.

Applicato enim ſegmento AEB ſegmento CFD, et poſito quidem puncto A in C, recta vero linea AB ſuper CD, congruet et B punctum



puncto D, propterea quod AB ipſi CD ſit aequalis. non igitur, congruente recta linea AB ipſi CD, non congruet ſegmentum AEB ſegmento CFD [a]. congruet igitur et ipſi aequale erit. ſuper aequalibus igitur rectis lineis &c. Q. E. D.

a. 23. 3.

PROP. XXV. PROB.

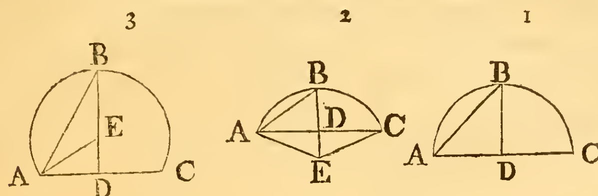
CIRCULI ſegmento dato deſcribere circulum cujus eſt ſegmentum.

Sit datum circuli ſegmentum ABC; oportet deſcribere circulum cujus ABC eſt ſegmentum.

a. 10. 1. Secetur AC bifariam [a] in D, et a puncto D ipſi AC ad rectos angulos

gulos ducatur [b] DB, et AB jungatur. ſi igitur * anguli ABD, BAD inter ſe aequales fuerint, erit recta BD aequalis [c] ipſi DA, et propterea ipſi DC. et quoniam tres rectae lineae DA, DB, DC ſunt inter ſe aequales, erit D centrum circuli [d]. centro igitur D, intervallo autem uni ipſarum DA, DB, DC aequali, circulus deſcribatur; tranſibit hic per reliqua puncta, et circulus cujus ſegmentum eſt ABC deſcriptus erit. quoniam vero centrum D eſt in ipſa AC, erit ABC ſegmentum ſemicirculus. ſi autem * anguli ABD, BAD inter ſe inaequales fuerint, ad rectam lineam AB atque ad punctum in ea A conſtituatur angulus BAE aequalis angulo [e] ABD, et DB ad E producatur, jungaturque EC. Quoniam igitur angulus ABE eſt aequalis angulo BAE, erit et BE

b. 11. 1.
* Fig. 1.
c. 6. 1.
d. 9. 3.
* Fig. 2, 3.
e. 23. 1.



recta linea ipſi EA aequalis [c]. et quoniam AD eſt aequalis DC, communis autem DE, duae AD, DE duabus CD, DE aequales ſunt, altera alteri; et angulus ADE eſt aequalis angulo CDE, rectus enim uterque eſt; igitur et baſis AE baſi EC eſt aequalis [f]. ſed oſtenſa eſt AE aequalis EB, quare et BE ipſi EC eſt aequalis; ac propterea tres rectae lineae AE, EB, EC inter ſe aequales ſunt; quare et E centrum eſt circuli [d]. centro igitur E, intervallo autem uni ipſarum AE, EB, EC aequali, circulus deſcribatur, hic per reliqua tranſibit puncta, et circulus cujus ſegmentum eſt ABC deſcriptus erit. et manifeſtum eſt ſi angulus ABD major fuerit angulo BAD, centrum E cadere extra ſegmentum ABC, quod propterea minus erit ſemicirculo. ſi autem angulus ABD minor

f. 4. 1.

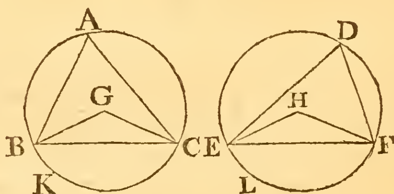
minor fuerit ipſo BAD, centrum E cadet intra ſegmentum ABC, quod propterea majus erit ſemicirculo. Circuli igitur ſegmento dato, deſcriptus eſt circulus cujus eſt ſegmentum. Q. E. F.

PROP. XXVI. THEOR.

IN aequalibus circulis aequales anguli aequalibus inſiſtunt circumferentiis, ſive ad centra, ſive ad circumferentias inſiſtunt.

Sint aequales circuli ABC, DEF, et in ipſis aequales anguli ad centra quidem BGC, EHF, ad circumferentias autem BAC, EDF. dico BKC circumferentiam circumferentiae ELF aequalem eſſe.

Jungantur enim BC, EF; et quoniam aequales ſunt ABC, DEF circuli, erunt et quae ex centris aequales; duae igitur BG, GC duabus EH, HF aequales ſunt; et angulus ad G eſt aequalis angulo ad



a. 4. 1. H; baſis igitur BC baſi EF eſt aequalis[a]. et quoniam aequalis eſt an-
b. 11. Def. 3. gulus ad A angulo ad D, ſegmentum BAC ſimile erit ſegmento[b] EDF; et ſunt ſuper aequalibus rectis lineis BC, EF; quae autem ſuper aequalibus rectis lineis ſimilia ſunt circulorum ſegmenta, inter ſe aequalia
c. 24. 3. ſunt[c]; ſegmentum igitur BAC ſegmento EDF eſt aequale. ſed et totus ABC circulus aequalis eſt toti DEF, reliquum igitur ſegmentum

BKC

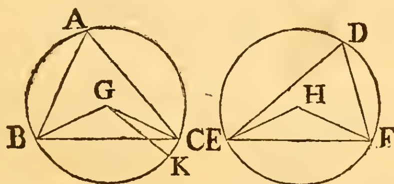
BKC reliquo ELF eſt aequale; circumferentia igitur BKC circumferentiae ELF aequalis erit. in aequalibus igitur circulis &c. Q. E. D.

PROP. XXVII. THEOR.

IN aequalibus circulis anguli qui aequalibus inſiſtunt circumferentiis inter ſe aequales ſunt, ſive ad centra, ſive ad circumferentias inſiſtant.

In aequalibus enim circulis ABC, DEF, aequalibus circumferentiis BC, EF inſiſtant anguli ad centra quidem BGC, EHF, ad circumferentias vero BAC, EDF. dico angulum BGC angulo EHF, et angulum BAC angulo EDF aequalem eſſe.

Si quidem igitur angulus BGC aequalis ſit angulo EHF, manifeſtum eſt angulum quoque BAC angulo EDF eſſe aequalem [a]. ſin minus unus a. 20. 3.



ipſorum eſt major. ſit major BGC, et conſtituatur ad rectam lineam BG, et ad punctum in ipſa G, angulo EHF aequalis angulus [b] BGK; b. 23. 1.
aequales autem anguli aequalibus inſiſtunt circumferentiis quando ad centra fuerint [c]; aequalis igitur eſt circumferentia BK circumferentiae c. 26. 3.
EF. ſed EF aequalis eſt ipſi BC, ergo et BK ipſi BC eſt aequalis, minor majori, quod fieri non poteſt. non igitur inaequalis eſt angulus BGC angulo EHF; ergo eſt aequalis. atque eſt anguli quidem BGC dimidium angulus qui ad A, anguli vero EHF dimidium qui ad D [a].

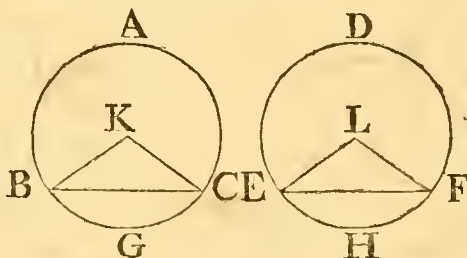
angulus igitur qui ad A angulo qui ad D est aequalis. in aequalibus igitur circulis &c. Q. E. D.

PROP. XXVIII. THEOR.

IN aequalibus circulis aequales rectae lineae circumferentias aequales auferunt, majorem quidem majori, minorem vero minori.

Sint aequales circuli ABC, DEF, et in ipsis aequales rectae lineae BC, EF quae circumferentias quidem BAC, EDF majores auferant, minores vero BGC, EHF. dico circumferentiam BAC majorem majori EDF, et minorem circumferentiam BGC minori EHF aequalem esse.

a. 1. 3. Sumantur enim centra circulorum [a] K, L junganturque BK, KC, EL, LF. et quoniam circuli aequales sunt, erunt et quae ex centris aequales;



duae igitur BK, KC sunt aequales duabus EL, LF; et basis BC ae-
b. 8. 1. qualis est basi EF, angulus igitur BKC angulo ELF est aequalis [b]. aequales autem anguli aequalibus insistunt circumferentiis quando ad cen-
c. 26. 3. tra fuerint [c], circumferentia igitur BGC aequalis est circumferentiae EHF; sed et totus ABC circulus toti EDF est aequalis; reliqua igitur circumferentia BAC reliquae EDF aequalis erit. ergo in aequalibus circulis &c. Q. E. D.

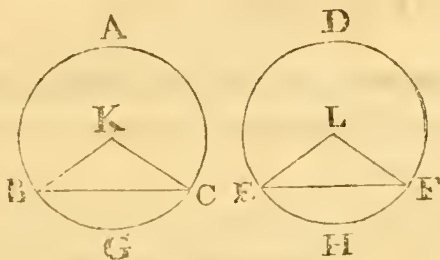
PROP. XXIX.

PROP. XXIX. THEOR.

IN aequalibus circulis aequales circumferentias aequales rectae lineae fubtendunt.

Sint aequales circuli ABC, DEF, et in ipfis aequales fumantur circumferentiae BGC, EHF, et BC, EF jungantur. dico rectam lineam BC rectae EF aequalem effe.

Sumantur enim centra circulorum [a] K, L, et jungantur BK, KC, EL, LF. et quoniam circumferentia BGC eft aequalis circumferentiae EHF, a. 1. 3.



erit et angulus BKC angulo ELF aequalis [b]. et quoniam circuli ABC, DEF funt aequales, et quae ex centris aequales erunt; duae igitur BK, KC funt aequales duabus EL, LF, et aequales angulos continent. bafis igitur BC bafi EF eft aequalis [c]. in aequalibus igitur circulis &c. Q. E. D. b. 27. 3. c. 4. 1.

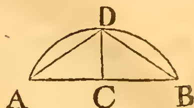
PROP. XXX. PROB.

DATAM circumferentiam bifariam fecare.

Sit data circumferentia ADB, oportet ADB circumferentiam bifariam fecare.

Jungatur AB, et in C bifariam fecetur [a]; a puncto autem C ipfi AB a. 10. 1.

ad rectos angulos ducatur CD, et jungantur AD, DB. Quoniam igitur AC eſt aequalis CB, communis autem CD, duae AC, CD duabus BC, CD aequales ſunt; et angulus ACD aequalis angulo BCD, rectus enim uterque eſt; baſis igitur AD baſi BD eſt



b. 4. 1. aequalis[b]. aequales autem rectae lineae circumferentias aequales au-
c. 28. 3. ferunt[c], majorem quidem majori, minorem vero minori, et eſt utraque ipſarum AD, DB ſemicirculo minor; circumferentia igitur AD circumferentiae DB eſt aequalis. Data igitur circumferentia bifariam ſecta eſt. Q. E. F.

PROP. XXXI. THEOR.

IN circulo angulus qui in ſemicirculo, rectus eſt; qui vero in majori ſegmento, minor eſt recto; et qui in minori, major recto.

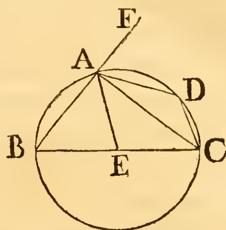
Sit circulus ABCD, diameter autem ejus ſit BC, centrum vero E; et ducatur CA circulum dividens in ſegmenta ABC, ADC, et jungantur BA, AD, DC. Dico angulum quidem qui eſt in ſemicirculo BAC rectum eſſe, qui vero in ſegmento ABC majore ſemicirculo, videlicet angulum ABC, minorem eſſe recto, et qui eſt in ſegmento ADC minore ſemicirculo, ſc. ADC angulum, recto majorem eſſe.

Jungatur AE, et BA ad F producatur. itaque quoniam BE eſt
a. 5. 1. aequalis EA, erit et angulus EAB aequalis ipſi EBA[a]; rurſus quoniam AE eſt aequalis EC, aequalis erit et angulus EAC angulo ECA[a]; totus igitur angulus BAC eſt aequalis duobus angulis ABC, ACB. eſt autem et angulus FAC extra triangulum ABC, duobus ABC, ACB aequa-
b. 32. 1. lis[b]; angulus igitur BAC eſt aequalis angulo FAC, ac propterea uter-
c. 10. Def. 1. que ipſorum rectus[c]. quare in ſemicirculo BAC angulus CAB rectus eſt.

Et

Et quoniam trianguli ABC duo anguli ABC, BAC duobus rectis ſunt minores[d], rectus autem BAC, erit ABC angulus recto minor; atque eſt in ſegmento ABC majore ſemicirculo. d. 17. 1.

Et quoniam in circulo quadrilaterum eſt ABCD, quadrilaterorum vero qui in circulis deſcribuntur, anguli oppoſiti duobus rectis ſunt aequales[e], erunt ABC, ADC anguli aequales duobus rectis; et angulus ABC minor eſt recto, reliquus igitur ADC recto major erit; atque eſt in ſegmento ADC minore ſemicirculo. Q. E. D. e. 22. 3.



Et patet circumferentiam AB cadere extra rectam AB quae cum AC baſi ſc. ſegmenti continet angulum rectum verſus partes majoris ſegmenti ABC, circumferentiam vero AD cadere intra rectam AF quae cum eâdem AC angulum rectum continet verſus partes minoris ſegmenti ADC. ‘ Et hoc, ‘ nihilque aliud, intelligendum eſt quando in textu Graeco et verſioni- ‘ bus, angulus ſegmenti majoris, major; angulus vero ſegmenti minoris ‘ minor eſſe dicitur angulo recto.’

Cor. Ex hoc manifeſtum eſt, ſi trianguli unus angulus ſit aequalis duobus reliquis, eum rectum eſſe; propterea quod et qui deinceps eſt, iiſdem eſt aequalis. quando autem anguli deinceps ſunt aequales, recti ſunt[c]. c. Def. 10. 1.

PROP. XXXII. THEOR.

SI circulum contingat quaedam recta linea, a tactu autem ducatur recta linea circulum ſecans; anguli quos ad contingentem facit, aequales erunt iis qui ſunt in alternis circuli ſegmentis.

Circulum

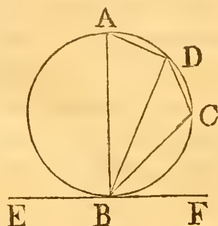
Circulum enim ABCD contingat quaedam recta linea EF in B, et a puncto B ad circulum ABCD ducatur recta linea BD ipsum secans. dico angulos quos BD facit cum contingente EF aequales esse iis qui sunt in alternis circuli segmentis, hoc est angulum quidem FBD esse aequalem angulo qui est in DAB segmento, angulum vero DBE aequalem angulo in segmento BCD.

a. 11. 1. Ducatur enim a puncto B ipsi EF ad rectos angulos [a] BA, et in circumferentia BD sumatur quodvis punctum C, junganturque AD, DC, CB. et quoniam circulum ABCD contingit recta linea EF in puncto B, et a tactu B ad rectos angulos contingenti ducta est BA, erit

b. 19. 3. in ipsa BA centrum ABCD circuli [b]; angulus

a. 31. 3. igitur ADB in semicirculo est rectus [c]; reliqui propterea anguli BAD, ABD uni recto aequa-

d. 32. 1. les sunt [d]. sed et ABF est rectus; ergo angulus ABF aequalis est angulis BAD, ABD.



communis auferatur ABD; reliquus igitur DBF ei qui est in alterno circuli segmento, ipsi scilicet BAD, aequalis est. et quoniam in circulo quadrilaterum est ABCD, anguli ejus oppositi aequales sunt duobus rec-

e. 22. 3. f. 13. 1. tis [e]; aequales igitur erunt anguli BAD, BCD ipsis DBF, DBE [f], quorum DBF ostensus est aequalis ipsi BAD; reliquus igitur DBE ei qui est in alterno circuli segmento, videlicet angulo DCB aequalis erit. si igitur circulum contingat &c. Q. E. D.

PROP. XXXIII. PROB.

SUPER datam rectam lineam describere segmentum circuli, quod capiat angulum dato angulo rectilineo aequalem.

Sit

Sit data recta linea AB, datus autem angulus rectilineus qui ad C; itaque oportet ſuper datam rectam lineam AB deſcribere ſegmentum circuli, quod capiat angulum aequalem angulo qui eſt ad C.

Et primum ſit angulus ad C rectus, et bifariam ſecetur [a] AB in F, centroque F, et intervallo FA deſcribatur ſemicirculus AHB; a. 10. 1. erit igitur angulus AHB in ſemicirculo aequalis recto angulo [b] ad C. b. 31. 3.

Non autem ſit angulus ad C rectus, et ad rectam lineam AB, et ad punctum in ea A conſtituatur angulus BAD angulo qui eſt ad C aequalis [c], a puncto vero A ipſi AD ad rectos angulos ducatur [d] AE; ſecetur [a] autem AB bifariam in F, atque a puncto F ducatur FG ad rectos angulos [d] ipſi AB, et GB jungatur. et quoniam AF eſt aequalis FB, communis autem FG, duae AF, FG duabus BF, FG ſunt aequales; et angulus AFG aequalis eſt angulo BFG; c. 23. 1. d. 11. 1. baſis igitur AG baſi GB eſt aequalis [e]. e. 4. 1. itaque centro quidem G intervallo vero GA circulus deſcriptus tranſibit etiam per B. deſcribatur et ſit AHB. Quoniam igitur a puncto A extremitate diametri AE ducta eſt AD ad rectos angulos ipſi AE, continget AD circulum [f]. f. 16. 3. et quoniam circulum AHB contingit recta linea AD, et a tactu ad A ducta eſt recta linea AB ſecans circulum, erit angulus DAB aequalis angulo in alterno circuli ſegmento AHB. ſed angulus DAB angulo ad C eſt aequalis, ergo et angulus ad C angulo in ſegmento AHB aequalis erit. ſuper datam igitur rectam lineam AB

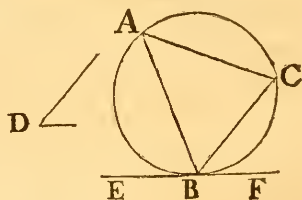
AB ſegmentum circuli deſcriptum eſt AHB quod capiat angulum dato angulo ad C aequalem. Q. E. F.

PROP. XXXIV. PROB.

A Dato circulo ſegmentum abſcindere quod capiat angulum dato angulo rectilineo aequalem.

Sit datus circulus ABC, datus autem angulus rectilineus qui ad D. oportet a circulo ABC ſegmentum abſcindere quod capiat angulum angulo ad D aequalem.

a. 17. 3. Ducatur recta linea EF circulum ABC in puncto B contingens[a], et ad rectam lineam BF et ad punctum in ea B conſtituatur angulus FBC an-
b. 23. 1. gulo qui eſt ad D aequalis[b]. Quoniam igitur circulum ABC contingit quaedam recta linea EF, et a tactu B ducta eſt BC, erit angulus FBC aequalis ei qui in alterno circuli ſegmento BAC con-
c. 32. 3. ſtituitur[c]. ſed FBC angulus angulo qui ad D eſt aequalis; angulus igitur in ſegmento BAC angulo ad D aequalis erit. A dato igitur circulo ABC abſciſſum eſt ſegmentum BAC capiens angulum dato angulo rectilineo qui eſt ad D aequalem. Q. E. F.



PROP. XXXV. THEOR.

SI in circulo duae rectae lineae ſeſe mutuo ſecent, rectangulum a ſegmentis unius contentum, aequale eſt rectangulo contento ſegmentis alterius.

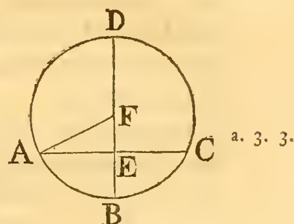
In

In circulo enim ABCD duae rectae lineae AC, BD ſeſe mutuo ſecent in puncto E; dico rectangulum contentum ipſis AE, EC aequale eſſe rectangulo quod continetur ipſis BE, ED.



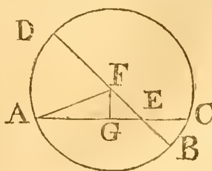
Si igitur AC, BD per centrum tranſeant, ita ut E ſit centrum circuli ABCD, manifeſtum eſt, aequalibus exiſtentibus AE. EC, BE, ED, et rectangulum contentum ipſis AE, EC aequale eſſe rectangulo quod BE, ED continetur.

Tranſeat autem una rectarum BD per centrum, ſecetque ad angulos rectos alteram AC per centrum non tranſeuntem in E. Bifariam igitur ſectâ BD in F, erit F centrum circuli ABCD; jungatur vero AF. et quoniam BD per centrum ducta rectam lineam AC non ductam per centrum ad rectos angulos ſecat in E, aequales inter ſe erunt [a] AE, EC. Quoniam vero recta linea BD ſecta eſt in partes aequales in F, et in partes inaequales in E, erit rectangulum contentum ipſis BE, ED una cum quadrato ex EF aequale quadrato ex FB [b], hoc eſt ex FA; quadrato vero ex FA aequalia ſunt quadrata ex AE, EF [c]; rectangulum igitur BE, ED una cum quadrato ex EF aequale eſt quadratis ex AE, EF. commune auferatur quadratum ex EF, reliquum igitur rectangulum BE, ED reliquo quadrato ex AE, hoc eſt rectangulo contento AE, EC aequale erit.



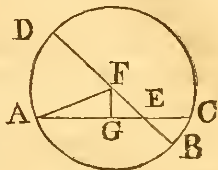
a. 3. 3.
b. 5. 2.
c. 47. 1.

Sed BD per centrum ducta ſecet alteram AC per centrum non ductam, ſed non ad angulos rectos, in puncto E. rurſus igitur, bifariam ſectâ BD in F, erit F centrum circuli. Jungatur AF, a centro vero F ducatur ad AC perpendicularis [d] FG; eſt igitur AG aequalis

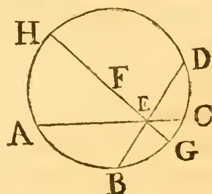


d. 12. 1.

a. 3. 3. ipsi GC[a], et propterea rectangulum AE, EC una cum quadrato ex
b. 5. 2. EG aequale est quadrato ex AG[b]. commune addatur ex GF quadratum, rectangulum igitur AE, EC una cum quadratis ex EG, GF aequale est quadratis ex AG, GF. sed quadratis quidem ex EG, GF aequale est quadratum ex EF; quadratis vero
c. 47. 1. ex AG, GF aequale est ex AF quadratum[c]. Ergo rectangulum AE, EC una cum quadrato ex EF aequale est quadrato ex AF, hoc est ex FB. quadrato vero ex FB aequale est rectangulum BE, ED una cum quadrato ex EF[b]; ergo rectangulum AE, EC una cum quadrato ex EF aequale est rectangulo BE, ED una cum quadrato ex EF. commune auferatur ex EF quadratum, reliquum igitur rectangulum AE, EC reliquo rectangulo BE, ED aequale erit.



Denique neutra rectarum AC, BD per centrum transeat, sumatur igitur centrum circuli ABCD, sitque F, et per E intersectionem scilicet rectarum AC, BD ducatur diameter GEFH. et quoniam rectangulum AE, EC ostensum est aequale rectangulo GE, EH; et similiter rectangulum BE, ED est aequale eidem GE, EH rectangulo; erit rectangulum contentum AE, EC aequale contento ipsis BE, ED rectangulo. Quare si in circulo duae rectae lineae &c. Q. E. D.



PROP. XXXVI.

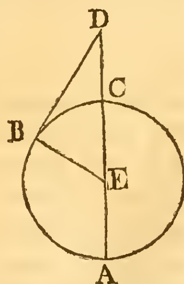
PROP. XXXVI. THEOR.

SI extra circulum aliquod punctum sumatur, et ab eo in circulum cadant duae rectae lineae, quarum altera quidem circulum secet, altera vero contingat; rectangulum quod a tota secante, et exterius assumpta inter punctum et convexam circumferentiam continetur, aequale erit quadrato ex contingente.

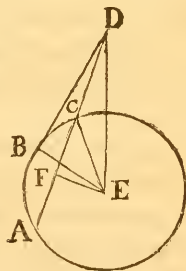
Extra circulum enim ABC sumatur aliquod punctum D, et ab eo ad circulum cadant duae rectae lineae DCA, DB; et DCA quidem circulum secet, DB vero contingat. dico rectangulum ab AD, DC contentum quadrato ex DB aequale esse.

Vel igitur DCA per centrum transit vel non; primum transeat per centrum, sitque E centrum circuli ABC, et EB jungatur; erit igitur angulus EBD rectus[a]. et quoniam recta linea AC bisariam secta est in E, et ipsi adjicitur CD, rectangulum ab AD, DC, una cum quadrato ex EC aequale erit quadrato ex ED[b]. aequalis autem est CE ipsi EB, rectangulum igitur ab AD, DC una cum quadrato ex EB aequale est quadrato ex ED. sed quadratum ex ED est aequale quadratis ex ipsis EB, BD[c], rectus enim angulus est EBD. rectangulum igitur ab AD, DC una cum quadrato ex EB aequale est quadratis ex EB, BD. commune auferatur quadratum ex EB, reliquum igitur ab AD, DC rectangulum aequale erit quadrato ex contingente DB.

a. 18. 3.
b. 6. 2.
c. 47. 1.



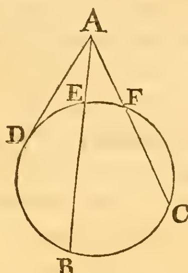
Sed DCA non transeat per centrum circuli ABC, sumaturque cen-
d. 1. 3. e. 12. 1. trum [d] E, et ad AC perpendicularis ducatur EF [e], et jungantur EB, EC, ED; rectus igitur est EFD angulus. et quoniam recta linea quaedam EF per centrum ducta, rectam lineam AC non ductam per centrum
f. 3. 3. ad rectos angulos secat, et bifariam ipsam secabit [f]; aequalis igitur est AF ipsi FC. et quoniam recta linea AC bifariam secta est in F, atque ipsi adjicitur CD, erit rectangulum ab AD, DC una cum quadrato
b. 6. 2. ex FC aequale quadrato ex FD [b]. commune apponatur ex FE quadratum, rectangulum igitur ab AD, DC una cum quadratis ex CF, FE est aequale quadratis ex DF, FE. sed quadratis quidem ex DF, FE



aequale est quadratum ex ED, etenim rectus est angulus EFD; quadratis vero ex CF, FE aequale est quadratum ex EC; rectangulum igitur ab AD, DC una cum quadrato ex CE est aequale quadrato ex ED. aequalis autem est CE ipsi EB, rectangulum igitur ab AD, DC una cum quadrato ex EB, aequale est ex ED quadrato. sed qua-
a. 18. 3. drato ex ED aequalia sunt quadrata ex EB, BD, siquidem rectus [a] est angulus EBD; ergo rectangulum ab AD, DC una cum quadrato ex EB aequale est quadratis ex EB, BD. commune auferatur quadratum ex EB, reliquum igitur ab AD, DC rectangulum quadrato ex DB aequale erit. si igitur extra circulum &c. Q. E. D.

Cor.

Cor. Hinc ſi a puncto quovis extra circulum ducantur rectae lineae AB, AC circulum ſecantes, rectangula contenta totis, et parti-



bus externis, viz. rectangula BA, AE; CA, AF inter ſe ſunt aequalia. utrumque enim ipſorum aequale eſt quadrato ex contingente AD.

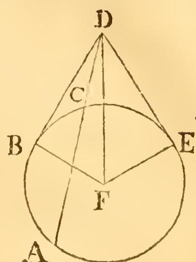
PROP. XXXVII. THEOR.

SI extra circulum ſumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant duae rectae lineae, quarum altera quidem circulum ſecet, altera vero incidat; ſit autem rectangulum contentum a tota ſecante et exterius aſſumpta inter punctum et convexam circumferentiam aequale quadrato ex incidente; quae incidit circulum continget.

Extra circulum enim ABC ſumatur aliquod punctum D, atque ab ipſo in circulum cadant duae rectae lineae DCA, DB, et DCA quidem circulum ſecet, DB vero incidat; ſitque rectangulum ab AD, DC aequale quadrato ex DB. Dico ipſam DB circulum ABC contingere.

Ducatur enim recta linea DE contingens circulum [a] ABC, et ſumatur a. 17. 3.

tur centrum circuli F, junganturque FE, FB, FD; rectus igitur est an-
b. 18. 3. gulus FED[b]. et quoniam DE circulum ABC contingit, secat autem DCA, rectangulum ab AD, DC aequale erit
c. 36. 3. quadrato ex DE[c]. sed rectangulum AD, DC ponitur aequale quadrato ex DB; quadratum igitur ex DE quadrato ex DB aequale erit, ac propterea DE erit ipsi DB aequalis. est autem et FE aequalis FB, duae igitur DE, EF duabus DB, BF aequales sunt, et basis communis
d. 8. 1. FD; angulus igitur DEF est aequalis ipsi DBF[d], rectus autem est DEF, ergo et DBF est rectus. atque FB producta est diameter, quae vero diametro circuli ad rectos
e. 16. 3. angulos ab extremitate ducitur, circulum contingit[e]. circulum igitur ABC contingit DB. si igitur extra circulum &c. Q. E. D.



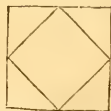
EUCLIDIS

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER QUARTUS.

DEFINITIONES.

I.

FIGURA rectilinea in figura rectilinea inſcribi dicitur, quando unuſquiſque figurae inſcriptae angulus, unumquodque latus ejus in qua inſcribitur tangit.

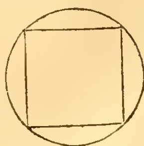


II.

Figura ſimiliter circa figuram circumſcribi dicitur, quando unumquodque latus circumſcriptae, unumquemque angulum ejus circa quam circumſcribitur tangit.

III.

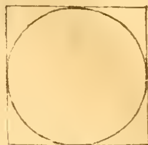
Figura rectilinea in circulo inſcribi dicitur, quando unuſquiſque inſcriptae figurae angulus circuli circumferentiam tangit.



Figura

IV.

Figura rectilinea circa circulum dicitur circumſcribi, quando unumquodque latus circumſcriptae, circuli circumferentiam contingit.

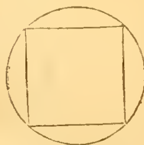


V.

Circulus ſimiliter in figura rectilinea inſcribi dicitur, quando circuli circumferentiam unumquodque latus ejus in qua inſcribitur contingit.

VI.

Circulus circa figuram rectilineam circumſcribi dicitur, quando circuli circumferentia unumquemque angulum ejus circa quam circumſcribitur tangit.



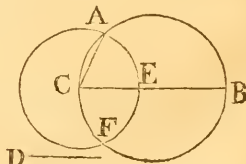
VII.

Recta linea in circulo aptari dicitur, quando ejus extrema in circuli circumferentia fuerint.

PROP. I. PROB.

IN dato circulo datae rectae lineae, quae diametro ejus major non ſit, aequalem rectam lineam aptare.

Sit datus circulus ABC, data autem recta linea D, non major circuli diametro; oportet in circulo ABC rectae lineae D aequalem rectam lineam aptare.



Ducatur circuli ABC diameter BC; ſiquidem igitur BC ſit aequalis ipſi D, factum jam erit quod proponebatur; etenim in

circulo

circulo ABC aptata eſt BC rectae lineae D aequalis. ſin minus, major eſt BC quam D, ponaturque ipſi D aequalis CE[a], et centro quidem C, intervallo autem CE circulus deſcribatur AEF, et CA jungatur. Quoniam igitur punctum C centrum eſt AEF circuli, erit CA ipſi CE aequalis; ſed D eſt aequalis CE, ergo et D ipſi CA aequalis erit. In dato igitur circulo ABC datae rectae lineae D, non majori circuli diametro, aequalis aptata eſt AC. Q. E. F.

a. 3. 1.

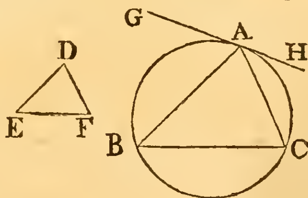
PROP. II. PROB.

IN dato circulo, triangulo dato aequiangulum triangulum inſcribere.

Sit datus circulus ABC, datum autem triangulum DEF; oportet in ABC circulo inſcribere triangulum triangulo DEF aequiangulum.

Ducatur recta linea GAH contingens circulum [a] ABC in puncto A, et ad rectam lineam AH, et ad punctum in ea A, angulo DEF aequalis angulus conſtituatur [b] HAC; ad rectam vero AG, et ad punctum in ea A, angulo DFE aequalis conſtituatur angulus GAB, et BC jungatur. Quoniam igitur circulum ABC contingit recta linea HAG, a tactu autem ducta eſt AC, erit HAC angulus aequalis angulo in alterno circuli ſegmento[c], videlicet ipſi ABC. ſed HAC aequalis eſt ipſi DEF, ergo et angulus ABC ipſi DEF eſt aequalis. eadem ratione et ACB eſt aequalis angulo DFE; reliquus igitur BAC reliquo EDF angulo eſt aequalis[d]. ergo triangulum ABC triangulo DEF eſt aequiangulum, et inſcriptum

a. 17. 3.
b. 23. 1.



c. 32. 3.
d. 32. 1.

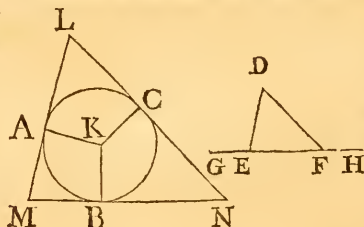
eft in circulo ABC. In dato igitur circulo dato triangulo aequiangulum triangulum infcriptum eft. Q. E. F.

PROP. III. PROB.

CIRCA datum circulum triangulo dato aequiangulum triangulum circumfcribere.

Sit datus circulus ABC, datum autem triangulum DEF; oportet circa ABC circulum triangulum circumfcribere triangulo DEF aequiangulum.

Protrahatur ex utraque parte EF ad puncta G, H, et fumatur circuli ABC centrum K, et recta linea KB utcunque ducatur; conftituaturque ad rectam lineam KB, et ad punctum in ea K, angulo quidem
a. 23. 1. DEG aequalis angulus [a] BKA, angulo autem DFH aequalis angulus [a] BKC; et per A, B, C puncta ducantur rectae lineae LAM, MBN, NCL circulum ABC contingen-
b. 17. 3. tes [b]. Quoniam igitur circulum ABC contingunt LM, MN, NL in punctis A, B, C, a centro autem K ad A, B, C puncta ductae funt KA, KB, KC, erunt
c. 18. 3. anguli ad puncta A, B, C recti [c]. et quoniam quadrilateri AMBK



anguli quatuor, quatuor rectis aequales funt, etenim in duo triangula dividitur, quorum anguli KAM, KBM funt recti, erunt reliqui AKB, AMB duobus rectis aequales. funt autem et DEG, DEF aequales duo-
d. 13. 1. bus rectis [d]; anguli igitur AKB, AMB angulis DEG, DEF aequales funt, quorum AKB ipfi DEG eft aequalis; reliquus igitur AMB reliquo DEF aequalis erit. fimiliter oftendetur angulus LNM ipfi DFE aequalis;

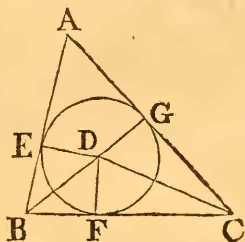
qualis; ergo et reliquus MLN eſt aequalis reliquo [e] EDF. aequiangu- e. 32. 1.
lum igitur eſt LMN triangulum triangulo DEF, et circumſcriptum eſt
circa ABC circulum. Circa datum igitur circulum, dato triangulo ae-
quiangulum triangulum circumſcriptum eſt. Q. E. F.

PROP. IV. PROB.

IN dato triangulo circulum inſcribere.

Sit datum triangulum ABC; oportet in triangulo ABC circulum inſcribere.

Secentur anguli ABC, BCA bifariam [a] rectis lineis BD, CD quae a. 9. 1.
conveniant inter ſe in D puncto, et a puncto D ad rectas lineas AB,
BC, CA perpendiculares ducantur [b] DE, b. 12. 1.
DF, DG. et quoniam angulus EBD eſt
aequalis ipſi FBD, bifariam enim ſectus eſt
ABC, eſt autem et rectus BED recto BFD
aequalis, erunt duo triangula EBD, FBD
duos angulos duobus angulis aequales ha-
bentia, et unum latus BD utrique com-
mune, quod ſcilicet uni aequalium angulo-



rum ſubtenditur; reliqua igitur latera reliquis lateribus aequalia habebunt[c], c. 26. 1.
et erit DE aequalis DF. eadem ratione et DG aequalis erit DF; tres i-
gitur rectae lineae DE, DF, DG inter ſe aequales ſunt; quare centro
D, intervallo autem unius ipſarum DE, DF, DG circulus deſcriptus e-
tiam per reliqua tranſibit puncta, et rectas lineas AB, BC, CA contin-
get, propterea quod recti ſunt anguli ad E, F, G puncta; quae enim
diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducitur circulum
contingit[d]. circulum igitur contingit unaquaeque ipſarum AB, BC, CA, d. 16. 3.

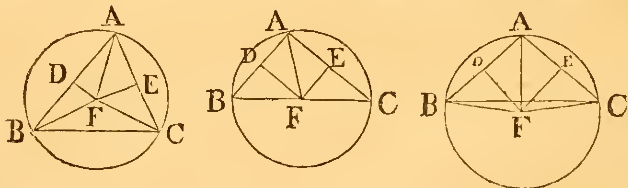
atque erit circulus inſcriptus in triangulo ABC. In dato igitur triangulo ABC circulus EFG inſcriptus eſt. Q. E. F.

PROP. V. PROB.

CIRCA datum triangulum circulum circumſcribere.

Sit datum triangulum ABC; oportet circa datum triangulum ABC circulum circumſcribere.

a. 10. 1. Secentur AB, AC bifariam [a] in D, E punctis, et a punctis D, E
b. 11. 1. ipſis AB, AC ad rectos angulos ducantur [b] DF, EF, quae quidem productae neceſſario convenient, nam ſi non conveniunt, erunt inter ſe parallelae; quare AB, AC quae ipſis ſunt ad rectos angulos erunt parallelae, quod eſt abſurdum; conveniant in F, et BF, FC, FA jungantur. Quoniam igitur AD eſt aequalis DB, communis autem et ad rectos an-



c. 4. 1. gulos DF, erit baſis AF baſi FB aequalis [c]. ſimiliter oſtendemus et CF aequalem FA; ergo et BF eſt aequalis FC; tres igitur FA, FB, FC inter ſe aequales ſunt. centro igitur F, intervallo autem unius ipſarum FA, FB, FC circulus deſcriptus etiam per reliqua tranſibit puncta; atque erit circulus circumſcriptus circa triangulum ABC. Circa datum igitur triangulum circumſcriptus eſt circulus. Q. E. F.

Cor. Et manifeſtum eſt, ſi centrum circuli intra triangulum cecide-
d. 31. 3. rit, unumquemque ejus angulum minorem eſſe recto [d], quoniam unuſquiſque

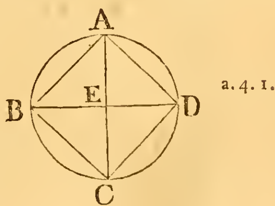
quiſque eſt in ſegmento ſemicirculo majore. ſi autem in uno laterum fuerit centrum, angulus cui latus hoc ſubtenditur, in ſemicirculo exiſtens, rectus erit. et ſi extra triangulum ceciderit centrum, ad partes alicujus lateris, angulus cui ſubtenditur hoc latus exiſtens in ſegmento ſemicirculo minore, major erit recto [d]. Quare ſi datum triangulum acutangulum fuerit, centrum circuli erit intra triangulum; ſi rectangulum fuerit, erit centrum in latere angulo recto oppoſito; et ſi fuerit obtuſangulum, cadet centrum extra triangulum, ad partes lateris obtuſo angulo oppoſiti. d. 31. 3.

PROP. VI. PROB.

IN dato circulo quadratum inſcribere.

Sit datus circulus ABCD; oportet in ABCD circulo quadratum inſcribere.

Ducantur circuli ABCD diametri ad rectos angulos inter ſe AC, BD; et AB, BC, CD, DA jungantur. Quoniam igitur BE eſt aequalis ED, etenim centrum eſt E, communis autem et ad rectos angulos EA; erit baſis BA aequalis baſi AD [a]. et eadem ratione utraque ipſarum BC, CD, utrique BA, AD eſt aequalis; aequilaterum igitur eſt ABCD quadrilaterum. Dico et rectangulum eſſe. Quoniam enim recta linea BD diameter eſt ABCD circuli, erit BAD ſemicirculus; quare angulus BAD rectus eſt [b]. et eadem ratione unuſquiſque ipſorum ABC, BCD, CDA eſt rectus; rectangulum igitur eſt ABCD quadrilaterum. oſtenſum autem eſt et aequilaterum eſſe, quadratum igitur eſt; et inſcriptum eſt in circulo ABCD. In dato igitur ABCD circulo quadratum ABCD inſcriptum eſt. Q. E. F.



a. 4. 1.

b. 31. 3.

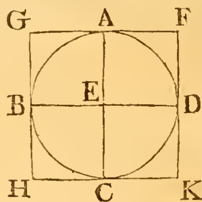
PROP. VII.

PROP. VII. PROB.

CIRCA datum circulum quadratum circumſcribere.

Sit datus circulus ABCD; oportet circa ABCD circulum quadratum circumſcribere.

Ducantur circuli ABCD duae diametri AC, BD ad rectos inter ſe angulos, et per puncta A, B, C, D ducantur circulum ABCD contin-
a. 17. 3. gentes [a] FG, GH, HK, KF. Quoniam igitur FG contingit circulum ABCD, a centro autem E ad tactum qui eſt ad A ducta eſt EA,
b. 18. 3. erunt anguli ad A recti [b]. eadem ratione et anguli ad puncta B, C, D recti ſunt. et quoniam angulus AEB rectus eſt, eſt autem et rectus EBG,
c. 28. 1. erit GH ipſi AC parallela [c]. eadem ratione, et AC parallela eſt ipſi FK. ſimiliter oſtendemus et utramque ipſarum GF, HK ipſi BED parallelam eſſe. parallelogramma igitur ſunt GK,
d. 34. 1. GC, AK, FB, BK; aequalis [d] igitur eſt GF quidem ipſi HK, GH vero ipſi FK. et quoniam AC aequalis eſt BD, ſed AC quidem utrique ipſarum GH, FK eſt aequalis; BD vero aequalis utrique GF, HK; erit et utraque GH, FK utrique GF, HK aequalis. aequilaterum igitur eſt FGHK quadrilaterum. Dico et rectangulum eſſe; quoniam enim parallelogrammum eſt GBEA, atque eſt rectus AEB angulus, rectus [d] erit et AGB. ſimiliter oſtendemus angulos etiam ad H, K, F rectos eſſe. rectangulum igitur eſt quadrilaterum FGHK. oſtenſum autem eſt aequilaterum; quadratum igitur eſt; et circumſcriptum eſt circa ABCD circulum. circa datum igitur circulum quadratum circumſcriptum eſt. Q. E. F.



PROP. VIII.

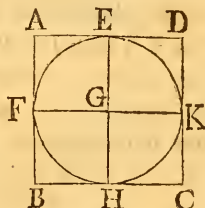
PROP. VIII. PROB.

IN dato quadrato circulum inſcribere.

Sit datum quadratum ABCD; oportet in quadrato ABCD circulum inſcribere.

Secetur utraque ipſarum AB, AD bifariam [a] in punctis F, E, et per E quidem alterutri ipſarum AB, CD, parallela ducatur [b] EH, per F vero ducatur FK parallela alterutri AD, BC. parallelogrammum igitur eſt unumquodque ipſorum AK, KB, AH, HD, AG, GC, BG, GD, et latera ipſorum oppoſita ſunt aequalia [c]. et quoniam AD eſt aequalis AB, et ipſius quidem AD dimidium eſt AE, ipſius vero AB dimidium AF; erit AE ipſi AF aequalis. quare et oppoſita latera ſunt aequalia, ergo FG eſt aequalis GE. ſimiliter oſtendemus et utramque ipſarum GH, GK utrique FG, GE aequalem eſſe. quatuor igitur GE, GF, GH, GK inter ſe ſunt aequales. itaque centro quidem G, intervallo autem unius ipſarum GE, GF, GH, GK circulus deſcriptus etiam per reliqua tranſibit puncta, et rectas lineas AB, BC, CD, DA continget, propterea quod anguli ad E, F, H, K recti ſunt [d]; quae enim diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducitur circulum contingit [e]. circulum igitur contingit unaquaeque ipſarum AB, BC, CD, DA, atque erit circulus in quadrato ABCD inſcriptus. In dato igitur quadrato circulus inſcriptus eſt. Q. E. F.

a. 10. 1.
b. 31. 1.
c. 34. 1.
d. 29. 1.
e. 16. 3.



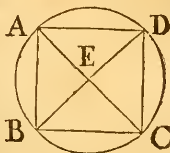
PROP. IX. PROB.

CIRCA datum quadratum circulum circumſcribere.

Sit

Sit datum quadratum ABCD; oportet circa ABCD quadratum circulum circumſcribere.

Jungantur enim AC, BD, quae ſe invicem ſecent in E. et quoniam DA eſt aequalis AB, communis autem AC, duae DA, AC duabus BA, AC aequales ſunt; et baſis DC eſt aequalis baſi BC, quare angulus
a. 8. 1. DAC angulo BAC aequalis erit[a]; angulus igitur DAB bifariam ſectus eſt rectâ lineâ AC. ſimiliter oſtendemus unumquemque angulorum ABC, BCD, CDA rectis lineis AC, BD bifariam ſectum eſſe. Quoniam igitur angulus DAB angulo ABC eſt aequalis, atque eſt anguli quidem DAB dimidium EAB, ipſius vero ABC dimidium EBA, erit et EAB angulus aequalis ipſi EBA; igitur et
b. 6. 1. latus EA lateri EB eſt aequale[b]. ſimiliter vero demonſtrabimus et utramque rectarum linearum EC, ED utrique EA, EB aequalem eſſe. Quatuor igitur rectae lineae EA, EB, EC, ED inter ſe ſunt aequales. centro igitur E intervallo autem unius ipſarum EA, EB, EC, ED circulus deſcriptus etiam per reliqua tranſibit puncta, atque erit circa ABCD quadratum circumſcriptus. Circa datum igitur quadratum circulus eſt circumſcriptus. Q. E. F.



PROP. X. PROB.

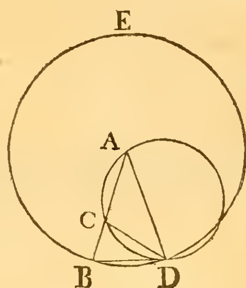
ISosceles triangulum conſtituere habens utrumque angulorum qui ſunt ad baſim duplum reliqui.

a. 11. 2. Exponatur recta quaedam linea AB, et ſecetur in C puncto, ita ut rectangulum contentum ab AB, BC aequale ſit quadrato ex CA[a]; et centro quidem A, intervallo autem AB circulus deſcribatur BDE, apteturque in BDE circulo recta linea BD aequalis ipſi AC quae non eſt major

major diametro circuli BDE[b]; junganturque DA, DC, et circa ADC triangulum circulus ACD circumſcribatur[c]. Triangulum iſoſceles ABD habebit utrumque angulorum ABD, ADB ad baſim, duplum reliqui BAD.

b. 1. 4.
c. 5. 4.

Quoniam enim rectangulum ab AB, BC aequale eſt quadrato ex AC, aequalis autem eſt AC ipſi BD, erit ab AB, BC rectangulum quadrato ex BD aequale. et quoniam extra circulum ACD ſumptum eſt punctum B, et a puncto B in circulum cadunt duae rectae lineae BCA, BD, et altera quidem ipſarum ſecat, altera vero incidit, atque eſt rectangulum ab AB, BC aequale quadrato ex BD; recta linea BD circulum continget[d]. quoniam igitur BD contingit, et a tactu D ducta eſt DC, erit BDC angulus aequalis angulo in alterno circuli ſegmento[e], videlicet ipſi DAC; communis apponatur CDA; totus igitur BDA eſt aequalis duobus angulis CDA, DAC. ſed ipſis CDA, DAC aequalis eſt exterior angulus BCD[f]; ergo et BDA aequalis eſt ipſi BCD. ſed BDA eſt aequalis angulo CBD, quoniam et latus AD lateri AB eſt aequale[g]; ergo et CBD, i. e. DBA ipſi BCD aequalis erit. tres igitur anguli BDA, DBA, BCD inter ſe aequales ſunt. et quoniam angulus DBC aequalis eſt angulo BCD, erit et latus BD lateri DC aequale[h]. ſed BD ponitur aequalis ipſi CA, ergo et CA eſt aequalis CD; quare et angulus CDA aequalis[g] eſt ipſi DAC. ipſi igitur CDA, DAC ſimul dupli ſunt anguli DAC. eſt autem et BCD ipſis CDA, DAC aequalis; ergo et BCD duplus eſt ipſius DAC. aequalis autem eſt BCD alterutri ipſorum BDA, DBA; uterque igitur ipſorum BDA, DBA, ipſius DAB eſt duplus. Iſoſceles igitur triangulum conſtitutum



d. 37. 3.
e. 32. 3.
f. 32. 1.
g. 5. 1.
h. 6. 1.

eſt ABD, habens utrumque angulorum qui ſunt ad baſim BD duplum reliqui. Q. E. F.

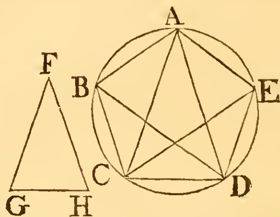
PROP. XI. PROB.

IN dato circulo pentagonum aequilaterum et aequiangulum inſcribere.

Sit datus circulus ABCDE; oportet in ABCDE circulo pentagonum aequilaterum et aequiangulum inſcribere.

Exponatur triangulum iſoſceles FGH habens utrumque angulorum
a. 10. 4. ad G, H duplum anguli ad F[a]; et inſcribatur in circulo ABCDE tri-
b. 2. 4. angulo FGH aequiangulum triangulum [b] ACD, ita ut angulo quidem ad F aequalis ſit CAD; utrique vero ipſorum ad G, H, ſit aequalis uterque ACD, CDA; et uterque igitur ipſorum ACD, CDA anguli
c. 9. 1. CAD eſt duplus. ſecetur uterque ACD, CDA bifariam [c] rectis lineis CE, DB, et AB, BC, DE, EA jungantur.

Quoniam igitur uterque angulorum ACD, CDA duplus eſt ipſius CAD, et ſecti ſunt bifariam rectis lineis CE, DB; quinque anguli DAC, ACE, ECD, CDB, BDA inter ſe ſunt aequales. aequales autem anguli aequa-
d. 26. 3. libus circumferentiis inſiſtunt[d]; quinque igitur circumferentiae AB, BC, CD, DE, EA aequales ſunt inter ſe. ſed aequales circumferentias aequales rectae li-
e. 29. 3. neae ſubtendunt[e]; ergo et quinque rectae lineae AB, BC, CD, DE, EA inter ſe aequales ſunt. aequilaterum igitur eſt ABCDE pentagonum. Dico et aequiangulum eſſe. Quoniam enim circumferentia AB aequalis eſt circumferentiae DE, communis apponatur BCD; tota igitur ABCD circumferentia toti EDCB eſt aequalis.



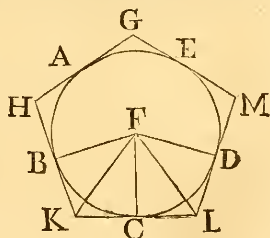
qualis. et circumferentiae quidem ABCD insistit angulus AED, circumferentiae vero EDCB insistit angulus BAE; igitur et BAE angulus est aequalis ipsi AED[f]. eadem ratione et unusquisque angulorum f. 27. 3.
ABC, BCD, CDE utrique ipsorum BAE, AED est aequalis. aequiangulum igitur est ABCDE pentagonum; ostensum autem est et aequilaterum esse. In dato igitur circulo pentagonum aequilaterum et aequiangulum inscriptum est. Q. E. F.

PROP. XII. PROB.

CIRCA datum circulum pentagonum aequilaterum et aequiangulum circumscribere.

Sit datus circulus ABCDE; oportet circa circulum ABCDE pentagonum aequilaterum et aequiangulum circumscribere.

Intelligantur pentagoni in circulo inscripti angulorum puncta esse A, B, C, D, E, ita ut circumferentiae AB, BC, CD, DE, EA sint aequales[a]; et per puncta A, B, C, D, E ducantur circulum contingentes [b] GH, HK, KL, LM, MG; sumaturque circuli ABCDE centrum F, et jungantur FB, FK, FC, FL, FD. Quoniam igitur recta linea KL contingit circulum ABCDE in C, et a centro F ad tactum qui est ad C ducta est FC, erit FC ad ipsam KL perpendicularis[c]; a. 11. 4. b. 17. 3. c. 18. 3.



rectus igitur est uterque angulorum qui sunt ad C. eadem ratione et anguli ad puncta B, D, recti sunt. et quoniam rectus angulus est FCK, quadratum ex FK aequale est quadratis ex FC, CK[d]. eadem ratione quadratis ex FB, BK aequale est ex FK quadratum. quadrata igitur ex FC, CK quadratis ex FB, BK aequalia sunt, quorum ex FC ei quod d. 47. 1.

ex FB eſt aequale; reliquum igitur quadratum ex CK reliquo ex BK
aequale erit; aequalis igitur eſt BK ipſi CK. et quoniam FB eſt ae-
qualis FC, communis autem FK, duae BF, FK duabus CF, FK ae-
quales ſunt; et baſis BK eſt aequalis baſi KC; angulus igitur BFK an-
e. 8. 1. gulo KFC eſt aequalis[e], angulus vero BKF angulo FKC. duplus igi-
tur eſt BFC anguli KFC, et BKC duplus ipſius FKC. eadem ratione et
angulus CFD ipſius CFL eſt duplus, CLD vero duplus anguli CLF.
et quoniam circumferentia BC circumferentiae CD eſt aequalis, erit et
f. 27. 3. angulus BFC aequalis ipſi CFD[f]. atque eſt BFC quidem anguli KFC
duplus, CFD vero duplus ipſius CFL; aequalis igitur eſt angulus KFC
ipſi CFL; eſt autem et rectus FCK recto
FCL aequalis. itaque duo triangula ſunt
FKC, FLC duos angulos duobus angulis
aequales habentia, alterum alteri, et unum
latus uni lateri aequale ipſis commune FC
quod aequalibus adjacet angulis; ergo et
reliqua latera reliquis lateribus aequalia ha-
bebunt, et reliquum angulum reliquo an-
g. 26. 1. gulo aequalem[g]. recta igitur linea KC eſt aequalis ipſi CL, angulus
vero FKC angulo FLC. et quoniam KC eſt aequalis CL, erit KL ip-
ſius KC dupla. eadem ratione et HK ipſius BK dupla oſtendetur. et
quoniam BK oſtenſa eſt aequalis ipſi KC, atque eſt KL quidem dupla
KC, HK vero ipſius BK dupla, erit HK ipſi KL aequalis. ſimiliter et
unaquaeque ipſarum GH, GM, ML oſtendetur aequalis utrique HK,
KL. aequilaterum igitur eſt GHKLM pentagonum. Dico et aequian-
gulum eſſe. Quoniam enim angulus FKC eſt aequalis ipſi FLC, et oſ-
tenſus eſt angulus HKL duplus ipſius FKC, ipſius vero FLC duplus
KLM, erit et HKL ipſi KLM aequalis. ſimiliter oſtendetur et unuſ-
quiſque ipſorum KHG, HGM, GML utrique HKL, KLM aequalis.

quinque

quinque igitur anguli GHK, HKL, KLM, LMG, MGH inter ſe aequales ſunt; aequiangulum igitur eſt GHKLM pentagonum. oſtenſum autem eſt etiam aequilaterum eſſe; et circumſcriptum eſt circa ABCDE circulum. Q. E. F.

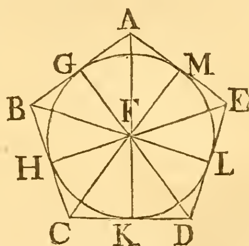
PROP. XIII. PROB.

IN dato pentagono aequilatero et aequiangulo circulum inſcribere.

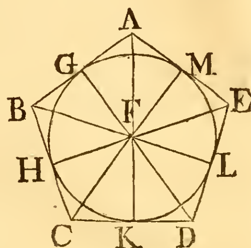
Sit datum pentagonum aequilaterum et aequiangulum ABCDE; oportet in ABCDE pentagono circulum inſcribere.

Secetur uterque angulorum BCD, CDE bifariam [a] rectis lineis CF, a. 9. 1.
DF, et a puncto F in quo conveniunt inter ſe CF, DF ducantur rectae lineae FB, FA, FE. Quoniam igitur BC eſt aequalis CD, communis autem CF, duae BC, CF duabus DC, CF aequales ſunt, et angulus BCF eſt aequalis ipſi DCF; baſis igitur BF baſi FD eſt aequalis [b], et BFC triangulum aequale triangulo DFC, et reliqui anguli reliquis angulis aequales quibus aequalia latera ſubtenduntur; angulus igitur CBF angulo CDF aequalis erit. et quoniam angulus CDE ipſius CDF eſt duplus, et CDE quidem aequalis ipſi CBA, angulus vero CDF ipſi CBF, erit et CBA duplus anguli CBF; angulus igitur ABF angulo CBF eſt aequalis; quare angulus ABC bifariam ſectus eſt recta linea BF. ſimiliter oſtendetur unumquemque angulorum BAE, AED rectis lineis AF, FE bifariam ſectum eſſe. a puncto F ad rectas lineas AB, BC, CD, DE, EA ducantur perpendiculares [c] c. 12. 1.
FG, FH, FK, FL, FM. et quoniam angulus HCF eſt aequalis ipſi KCF,

b. 4. 1.



KCF, eſt autem et rectus FHC recto FKC aequalis; erunt duo triangula FHC, FKC duos angulos duobus angulis aequales habentia, et unum latus commune utriſque, viz. FC, quod uni aequalium angulorum ſubtenditur; ergo et reliqua latera reliquis lateribus aequalia habe-
d. 26. 1. bunt[d]; perpendicularis igitur FH perpendiculari FK eſt aequalis. ſimiliter oſtendetur et unaquaeque ipſarum FL, FM, FG aequalis utrique FH, FK; quinque igitur rectae lineae FG, FH, FK, FL, FM inter ſe aequales ſunt. quare centro F, intervallo autem unius ipſarum FG, FH, FK, FL, FM circulus deſcriptus etiam per reliqua tranſibit puncta, et rectas lineas AB, BC, CD, DE, EA continget, propterea quod anguli ad G, H, K, L, M recti ſunt; quae enim ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos diametro du-
e. 16. 3. citur circulum contingit[e]. circulum igitur contingit unaquaeque ipſarum AB, BC, CD, DE, EA, atque erit circulus in pentagono ABCDE inſcriptus. In dato igitur pentagono aequilatero et aequiangulo circulus inſcriptus eſt. Q. E. F.



PROP. XIV. PROB.

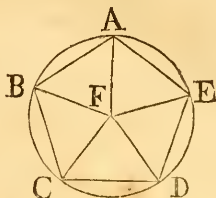
CIRCA datum pentagonum aequilaterum et aequiangulum circulum circumſcribere.

Sit datum pentagonum aequilaterum et aequiangulum ABCDE; oportet circa pentagonum ABCDE circulum circumſcribere.

a. 9. 1. Secetur uterque angulorum BCD, CDE bifariam [a] rectis lineis CF, FD, et a puncto F in quo conveniunt rectae lineae, ad puncta B, A, E ducantur FB, FA, FE. ſimiliter ut in antecedente oſtendetur unumquemque

quemque angulorum CBA, BAE, AED rectis lineis BF, FA, FE bifariam sectum esse. et quoniam angulus BCD ipsi CDE est aequalis, atque est anguli quidem BCD dimidium FCD, ipsius vero CDE dimidium CDF; erit et FCD aequalis ipsi FDC; quare et latus CF lateri FD est aequale[b]. similiter ostendetur et unaquaeque ipsarum FB, FA, FE aequalis utrique FC, FD. quinque igitur rectae lineae FA, FB, FC, FD, FE inter se aequales sunt. centro igitur F, intervallo autem unius ipsarum FA, FB, FC, FD, FE circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta, atque circumscriptus erit circa pentagonum aequilaterum et aequiangulum ABCDE. Circa datum igitur pentagonum aequilaterum et aequiangulum circulus est circumscriptus. Q. E. D.

b. 6. 1.

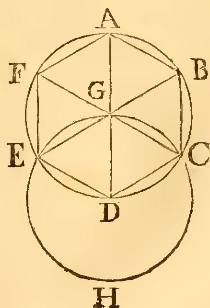


PROP. XV. PROB.

IN dato circulo hexagonum aequilaterum et aequiangulum inscribere.

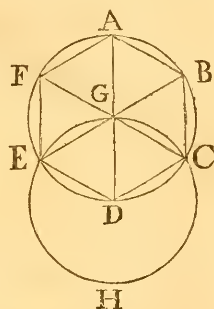
Sit datus circulus ABCDEF; oportet in circulo ABCDEF hexagonum aequilaterum et aequiangulum inscribere.

Sumatur G centrum circuli ABCDEF, et ducatur diameter AGD; et centro quidem D, intervallo autem DG circulus describatur EGCH, et junctae EG, CG ad puncta B, F producantur, junganturque AB, BC, CD, DE, EF, FA. Dico hexagonum ABCDEF aequilaterum et aequiangulum esse.



Quoniam

Quoniam enim G punctum centrum est ABCDEF circuli, erit GE ipsi GD aequalis. rursus quoniam D centrum est circuli EGCH, erit DE aequalis DG; sed GE ipsi GD aequalis ostensa est, ergo GE ipsi ED est aequalis; aequilaterum igitur est EGD triangulum, ideoque tres ipsius anguli EGD, GDE, DEG inter se aequales sunt, quoniam tri-
a. 5. 1. angulorum isosceelium anguli ad basim sunt inter se aequales [a]. et sunt tri-
b. 32. 1. anguli tres anguli aequales duobus rectis [b]; angulus igitur EGD duorum rectorum tertia pars est. similiter ostendetur et DGC duorum rectorum tertia pars. et quoniam recta linea GC super rectam EB insistens angulos qui deinceps sunt EGC, CGB duobus
c. 13. 1. rectis aequales efficit [c], erit reliquus CGB tertia pars duorum rectorum; anguli igitur EGD, DGC, CGB inter se sunt aequales. et qui ipsis ad verticem sunt anguli BGA, AGF, FGE
d. 15. 1. aequales sunt ipsis EGD, DGC, CGB [d]. sex igitur anguli EGD, DGC, CGB, BGA, AGF, FGE inter se aequales sunt. sed aequales an-
e. 26. 3. guli aequalibus circumferentiis insistunt [e]; sex igitur circumferentiae AB, BC, CD, DE, EF, FA inter se sunt aequales. aequales autem circumferentias aequales
f. 29. 3. rectae lineae subtendunt [f]; ergo et sex rectae lineae inter se aequales sunt. aequilaterum igitur est ABCDEF hexagonum. Dico et aequiangulum esse. quoniam enim circumferentia AF circumferentiae ED est aequalis, communis apponatur circumferentia ABCD; tota igitur FABCD circumferentia aequalis est toti circumferentiae EDCBA. et circumferentiae quidem FABCD angulus FED insistit, circumferentiae vero EDCBA insistit angulus AFE; angulus igitur AFE ipsi DEF est aequalis. similiter ostendentur et reliqui anguli hexagoni ABCDEF sigillatim aequales utrique ipsorum AFE, DEF. aequiangulum igitur



est

eſt ABCDEF hexagonum. oſtenſum autem eſt et aequilaterum eſſe; et inſcriptum eſt in circulo ABCDEF. In dato igitur circulo hexagonum aequilaterum et aequiangulum inſcriptum eſt. Q. E. F.

Cor. Ex hoc manifeſtum eſt hexagoni latus, ei quae eſt ex centro circuli aequale eſſe.

Et ſi per puncta A, B, C, D, E, F contingentes circulum ducamus, circa circulum hexagonum aequilaterum et aequiangulum circumſcribetur, conſequenter iis quae in pentagono dicta ſunt; et praeterea ſimiliter in dato hexagono aequilatero et aequiangulo circulum inſcribemus, et circa illud circumſcribemus.

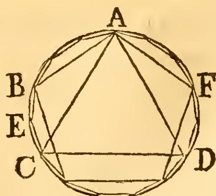
PROP. XVI. PROB.

IN dato circulo quindecagonum aequilaterum et aequiangulum inſcribere.

Sit datus circulus ABCD; oportet in ABCD circulo quindecagonum aequilaterum et aequiangulum inſcribere.

Sit in circulo ABCD trianguli quidem aequilateri ipſi inſcripti latus AC[a], pentagoni vero aequilateri et aequianguli latus [b] AB; qualium igitur partium eſt ABCD, tota ſcilicet circumferentia, quindecim, earum circumferentia quidem ABC tertia exiſtens totius erit quinque; circumferentia vero AB, quae quinta eſt totius, erit trium; reliqua igitur BC eſt duarum. ſecetur BC bifariam [c] in E; quare utraque ipſarum BE, EC circumferentiarum quintadecima pars eſt circumferentiae circuli ABCD. ſi igitur jungentes BE, EC aequales ipſis in continuum rectas lineas in circulo ABCD aptemus[d],

a. 2. 4.
b. 11. 4.
c. 30. 3.
d. 1. 4.



in ipſo inſcriptum erit quindecagonum aequilaterum et aequiangulum. Q. E. F.

Similiter autem iis quae dicta ſunt in pentagono, ſi per circumferentiae diviſiones, contingentes circulum ducamus, circa ipſum circumſcribetur quindecagonum aequilaterum et aequiangulum. et inſuper in dato quindecagono aequilatero et aequiangulo ſimiliter circulum inſcribemus, et circa illud circumſcribemus.

EUCLIDIS

EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBER QUINTUS.

DEFINITIONES.

I.

MAGNITUDO dicitur pars magnitudinis, minor majoris, quando minor majorem metitur.

II.

Major dicitur multiplex minoris, quando majorem minor metitur.

III.

" Ratio eſt duarum magnitudinum ejuſdem generis, ſecundum quanti-
" tatem, mutua quaedam habitudo."

IV.

Rationem habere inter ſe magnitudines dicuntur, quarum minor multiplicata majorem ſuperare poteſt.

V.

In eadem ratione magnitudines eſſe dicuntur, prima ad ſecundam et tertia ad quartam, quando primae et tertiae aeque multiplices, ſecundae et quartae aeque multiplices, juxta quamvis multiplicationem, utraque utramque, vel unà ſuperant, vel unà aequales ſunt, vel unà deficiunt, inter ſe comparatae.

VI.

Magnitudines quae eandem rationem habent, proportionales vocentur.

VII.

Quando autem aeque multiplicium, multiplex quidem primae ſuperaverit multiplicem ſecundae, multiplex autem tertiae non ſuperaverit multiplicem quartae, tunc prima ad ſecundam majorem rationem habere dicitur quam tertia ad quartam. et contra tertia ad quartam minorem rationem habere dicitur quam prima ad ſecundam.

VIII.

" Proportio eſt rationum ſimilitudo."

IX.

Proportio vero in tribus terminis ad minimum conſiſtit.

X.

Quando tres magnitudines proportionales ſunt, prima ad tertiam, duplicatam rationem habere dicitur ejus quam habet ad ſecundam.

XI.

Quando autem quatuor magnitudines ſunt deinceps proportionales, prima ad quartam, triplicatam habere rationem dicitur ejus quam habet ad ſecundam. et ſic deinceps, una amplius, quotcunque fuerint proportionales.

Definitio A, viz. rationis compoſitae.

Si fuerint quotcunque magnitudines ejuſdem generis, prima ad ultimam habere dicitur rationem compoſitam ex ratione quam habet prima ad ſecundam,

ſecundam, et ratione ſecundae ad tertiam, et eâ quam habet tertia ad quartam, et ita deinceps uſque ad ultimam.

Exemp. gr. ſint magnitudines A, B, C, D, prima A habere dicitur ad ultimam D rationem compoſitam ex ratione ipſius A ad B, et ratione B ad C, et ratione C ad D. vel ratio A ad D dicitur compoſita eſſe ex rationibus A ad B, B ad C, et C ad D.

Si igitur ratio A ad B, eadem ſit rationi E ad F; et ratio B ad C, eadem fuerit rationi G ad H; et ratio C ad D eadem rationi K ad L; A ad D habere dicitur rationem compoſitam ex rationibus quae eadem ſunt rationibus E ad F, G ad H, et K ad L. idemque intelligitur quando, brevitatis gratia, dicitur A ad D habere rationem compoſitam ex rationibus E ad F, G ad H, et K ad L.

Similiter, ſi ratio M ad N eadem ſit rationi A ad D, praecedentibus manentibus, brevitatis gratia, dicitur ratio M ad N eadem eſſe rationi compoſitae ex rationibus E ad F, G ad H, et K ad L.

XII.

Homologae magnitudines, in proportionalibus, dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, et conſequentes conſequentibus.

'Vocabulis ſequentibus, apud Geometras veteres deſignantur modi quidam mutandi ſive ordinem, ſive magnitudinem proportionalium, ita tamen ut proportionales maneant.'

XIII.

Εναλλὰξ, i. e. Permutando; hoc vocabulo utuntur quando quatuor ſunt proportionales, et concluditur eſſe ut prima ad tertiam, ita ſecunda ad quartam; ut oſtenſum eſt in Prop. 16. Libri hujus 5ti.

XIV.

Ανάπαλιν, Invertendo; quando quatuor ſunt proportionales, et concluditur eſſe ut ſecunda ad primam, ita quarta ad tertiam. Prop. B. Lib. 5.

Συνθέντι,

XV.

Συνθέντι, Componendo; quando quatuor ſunt proportionales, et concluditur ut prima una cum ſecunda ad ſecundam, ita tertia una cum quarta ad quartam. Prop. 18. Lib. 5.

XVI.

Διελόντι, Dividendo; quando quatuor ſunt proportionales, et concluditur ut exceſſus quo prima ſuperat ſecundam ad ſecundam, ita exceſſus quo tertia ſuperat quartam ad quartam. Prop. 17. Lib. 5.

XVII.

Αναςρέψαντι, Convertendo; quando quatuor ſunt proportionales, et concluditur ut prima ad exceſſum quo ſuperat ſecundam, ita tertia ad exceſſum quo ſuperat quartam. Prop. E. Lib. 5.

XVIII.

Διίσȣ, Ex aequo, ſive ex aequali, ſc. intervallo; quando pluribus exiſtentibus magnitudinibus, et aliis ipſis numero aequalibus, quae binae ſumptae ſunt in eadem ratione; et concluditur ut prima ad ultimam in primis magnitudinibus, ita, in ſecundis magnitudinibus, prima ad ultimam. ‘Hujus duae ſunt ſpecies ſequentes.’

XIX.

Διίσȣ, Sive ex aequali ſimpliciter; quando fuerit prima ad ſecundam in primis magnitudinibus, ut in ſecundis prima ad ſecundam; ut autem, in primis, ſecunda ad tertiam, ita in ſecundis, ſecunda ad tertiam; et ita deinceps. et concluditur ut in praecedente dictum fuit. Prop. 22. Lib. 5.

XX.

Διίσȣ ἐν τῇ τεταραγμένῃ ἀναλογίᾳ*, Ex aequali in proportione perturbata, ſeu inordinata; quando, in primis magnitudinibus, fuerit prima ad ſecundam, ut, in ſecundis, penultima ad ultimam; ut au-

* Prop. 4. Lib. 2. Archimedis de ſphaera et cylindro.

tem,

tem, in primis, ſecunda ad tertiam, ita, in ſecundis antepenultima ad penultimam; et ut, in primis, tertia ad quartam, ita, in ſecundis, tertia ab ultima ad antepenultimam; et ita deinceps. et concluditur ut in Definitione 18va dictum fuit. Prop. 23. Lib. 5.

AXIOMATA.

I.

EJUSDEM ſive aequalium aeque multiplices, inter ſe aequales ſunt.

II.

Quarum eadem aeque multiplex eſt, vel quarum aequales ſunt aeque multiplices, et ipſae inter ſe ſunt aequales.

III.

Multiplex majoris major eſt aeque multiplici minoris.

IV.

Magnitudo cujus multiplex major eſt aeque multiplici alterius, major eſt alterâ illa magnitudine.

PROP. I. THEOR.

SI fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, aequalium numero, ſingulae ſingularum aeque multiplices; quam multiplex eſt una magnitudo unius, tam multiplices erunt et omnes omnium.

Sint quotcunque magnitudines AB, CD, quotcunque magnitudinum E, F, aequalium numero, ſingulae ſingularum aeque multiplices. Dico

quam

quam multiplex eſt AB ipſius E, tam multiplices eſſe et AB, CD ſimul ipſarum E, F ſimul.

Quoniam enim AB aeque multiplex eſt ipſius E, ac CD ipſius F; quot magnitudines ſunt in AB aequales ipſi E, tot erunt et in CD aequales ipſi F. dividatur AB quidem in partes ipſi E aequales, quae ſint AG, GB; CD vero in partes aequales ipſi F, videlicet CH, HD. erit igitur multitudo partium CH, HD aequalis multitudini ipſarum AG, GB. et quoniam AG eſt aequalis E, et CH aequalis F; erunt et AG,
a. Ax. 2. 1. CH, aequales [a] ipſis E, F. eadem ratione quoniam GB eſt aequalis E, et HD ipſi F; erunt GB, HD aequales [a] ipſis E, F. quot ſunt itaque in AB aequales ipſi E, tot ſunt et in AB, CD aequales ipſis E, F. Ergo quam multiplex eſt AB ipſius E, tam multiplices erunt et AB, CD ſimul ipſarum E, F ſimul.

Si igitur fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, aequalium numero, ſingulae ſingularum aeque multiplices; quam multiplex eſt una magnitudo unius, tam multiplices erunt et omnes omnium. eadem enim demonſtratio tenet in quotcunque magnitudinibus. Q. E. D.

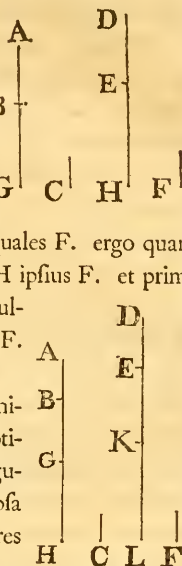
PROP. II. THEOR.

SI prima ſecundae aeque multiplex fuerit ac tertia quartae, fuerit autem et quinta ſecundae aeque multiplex ac ſexta quartae; erit etiam prima una cum quinta ſecundae aeque multiplex ac tertia cum ſexta quartae.

Prima enim AB ſecundae C aeque multiplex ſit, atque tertia DE quartae F; ſit autem et quinta BG ſecundae C aeque multiplex ac ſexta

EH

EH quartae F. Dico primam una cum quinta ſc. AG, ſecundae C aeque multiplicem eſſe, ac tertiam una cum ſexta ſc. DH quartae F.



Quoniam enim AB aeque multiplex eſt ipſius C, ac DE ipſius F; quot magnitudines ſunt in AB aequales C, tot erunt et in DE aequales F. eadem ratione et quot ſunt in BG aequales C, tot et in EH erunt aequales F. quot igitur ſunt in tota AG aequales C, tot erunt et in tota DH aequales F. ergo quam multiplex eſt AG ipſius C tam multiplex eſt et DH ipſius F. et prima igitur una cum quinta AG ſecundae C aeque multiplex erit, ac tertia cum ſexta DH quartae F. Quare &c. Q. E. D.

Cor. Hinc ſequitur ſi fuerint quotcunque magnitudines AB, BG, GH multiplices ipſius C; ac totidem DE, EK, KL aeque multiplices ipſius F, ſingulae ſingularum, erunt omnes priores ſimul ſc. ipſa AH ipſius C aeque multiplex, ac omnes poſteriores ſimul ſc. ipſa DL ipſius F.

PROP. III. THEOR.

SI prima ſecundae aeque multiplex fuerit ac tertia quartae; ſumantur autem aeque multiplices primae et tertiae; erit et ex aequali, ſumptarum utraque utriuſque aeque multiplex, altera quidem ſecundae, altera vero quartae.

Prima enim A ſecundae B aeque multiplex ſit ac tertia C quartae D;

et ſumantur ipſarum A, C, aeque multiplices, EF, GH. Dico EF aeque multiplicem eſſe ipſius B, ac GH ipſius D.

Quoniam enim EF aeque multiplex eſt ipſius A, ac GH ipſius C; quot magnitudines ſunt in EF aequales A, tot erunt et in GH aequales C. dividatur EF quidem in magnitudines ipſi A aequales EK, KF; GH vero in magnitudines aequales C videlicet GL, LH; erit igitur ipſarum EK, KF, multitudo aequalis multitudini ipſarum GL, LH. et quoniam aeque multiplex eſt A ipſius B ac C ipſius D, aequalis autem EK ipſi A, et GL ipſi C; erit EK aeque multiplex ipſius B, ac GL ipſius D. eadem ratione aeque multiplex erit KF ipſius B, ac LH ipſius D; et ſimiliter ſi plures ſint partes in EF, GH ipſis A, C aequales. quoniam igitur prima EK ſecundae B aeque multiplex eſt, ac tertia GL quartae D; eſt autem et quinta KF ſecundae B aeque multiplex ac ſexta LH quartae D; erit et prima una cum quinta ſc. ipſa EF ſecundae B aeque multiplex[a], ac tertia cum ſexta ſc. GH quartae D. ſi igitur prima &c. Q. E. D.



a. 2. 5.

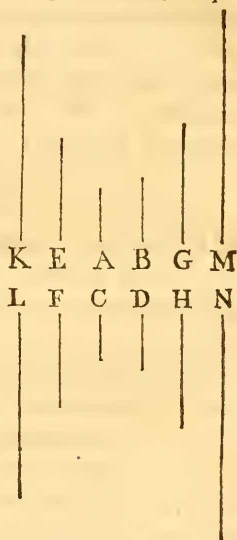
PROP. IV. THEOR.

SI prima ad ſecundam eandem habet rationem quam tertia ad quartam; et aeque multiplices primae et tertiae ad aeque multiplices ſecundae et quartae, juxta quamvis multiplicationem, eandem rationem habebunt, inter ſe comparatae.

Prima enim A ad ſecundam B eandem rationem habeat quam tertia

tia C ad quartam D; et ſumantur ipſarum quidem A, C utcunque aeque multiplices E, F; ipſarum vero B, D aliae utcunque aeque multiplices G, H. Dico E ad G, ita eſſe ut F ad H.

Sumantur ipſarum E, F utcunque aeque multiplices K, L, et ipſarum G, H aliae utcunque aeque multiplices M, N. quoniam igitur E aeque multiplex eſt ipſius A, atque F ipſius C, ſumuntur autem ipſarum E, F aeque multiplices K, L; erit K aeque multiplex [a] ipſius A, atque L ipſius C. eadem ratione M aeque multiplex erit ipſius B, atque N ipſius D. et quoniam eſt ut A ad B, ita C ad D; ſumptae autem ſunt ipſarum A, C aeque multiplices quaedam K, L; et ipſarum B, D aliae quaedam aeque multiplices M, N: ſi K ſuperat M, ſuperabit et L ipſam N; et ſi aequalis, aequalis; et ſi minor, minor [b]. ſuntque K, L quidem ipſarum E, F utcunque aeque multiplices; M, N vero ipſarum G, H aliae utcunque aeque multiplices. ut igitur E ad G, ita [b] erit F ad H. Quare ſi &c. Q. E. D.



a. 3. 5.

b. Def. 5. 5.

Cor. Et ſimiliter, ſi prima ad ſecundam eandem habeat rationem, quam tertia ad quartam; et aeque multiplices primae et tertiae, juxta quamvis multiplicationem, ad ſecundam et quartam eandem rationem habebunt. et ſimiliter prima et tertia, ad aeque multiplices quaſvis ſecundae et quartae eandem habebunt rationem.

Prima enim A ad ſecundam B eandem rationem habeat quam tertia C ad quartam D, et ſumantur ipſarum A, C utcunque aeque multiplices E, F; erit E ad B, ut F ad D.

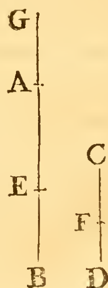
Sumantur ipſarum E, F utcunque aeque multiplices K, L, et ipſarum B, D aliae utcunque aeque multiplices G, H; et ut in praemiſſis oſtendetur K aeque multiplex ipſius A, atque L ipſius C. et quoniam eſt A ad B, ut C ad D, ſumptae autem ſunt ipſarum A, C aeque multiplices quaedam K, L, et ipſarum B, D aliae quaedam aeque multiplices G, H; ſi K ſuperat G, ſuperabit et L ipſam H; et ſi aequalis, aequalis; et ſi minor, minor. ſuntque K, L ipſarum E, F utcunque aeque multiplices, G, H vero ipſarum B, D aliae utcunque aeque multiplices. ut igitur E ad B, ita F ad D. ſimiliter oſtendetur alter caſus.

PROP. V. THEOR.

SI magnitudo magnitudinis aeque multiplex ſit atque ablata ablatae; erit et reliqua reliquae aeque multiplex atque tota totius.

Magnitudo enim AB magnitudinis CD aeque multiplex ſit atque ablata AE ablatae CF. Dico et reliquam EB reliquae FD aeque multiplicem eſſe atque totam AB totius CD.

Quam multiplex enim eſt AE ipſius CF, tam multiplex fiat et AG
a. 1. 5. ipſius FD. erit igitur [a] AE aeque multiplex ipſius CF atque EG ipſius CD; ponitur autem AE aeque multiplex ipſius CF atque AB ipſius CD; ſunt igitur EG, AB ipſius CD aeque multiplices; ac propterea EG ipſi
b. 1. Ax. 5. AB eſt aequalis [b]. communis auferatur AE, reliqua igitur AG aequalis eſt reliquae EB. itaque quoniam AE aeque multiplex eſt CF atque AG ipſius FD, eſtque AG aequalis ipſi EB; erit AE aeque multiplex CF atque EB ipſius FD. aeque multiplex autem ponitur AE ipſius CF atque AB ipſius CD; ergo EB ae-



que

que multiplex est ipsius FD atque AB ipsius CD. Quare si &c. Q. E. D.

PROP. VI. THEOR.

SI duae magnitudines duarum magnitudinum aeque multiplices sint, et ablatae quaedam sint earundem aeque multiplices; erunt et reliquae vel eisdem aequales, vel ipsarum aeque multiplices.

Duae enim magnitudines AB, CD duarum magnitudinum E, F aeque multiplices sint, et ablatae AG, CH earundem E, F sint aeque multiplices. Dico et reliquas GB, HD vel ipsis E, F aequales esse, vel ipsarum aeque multiplices.

Sit enim primum GB aequalis E; dico et HD ipsi F esse aequalem. Ponatur ipsi F aequalis CK. et quoniam AG aeque multiplex est E atque CH ipsius F, estque GB quidem aequalis E, CK vero aequalis F; erit AB aeque multiplex E atque KH ipsius F. aeque autem multiplex ponitur AB ipsius E atque CD ipsius F; ergo KH aeque multiplex est ipsius F atque CD ejusdem F. aequalis igitur est [a] KH ipsi CD. communis auferatur CH; ergo reliqua KC reliquae HD est aequalis. sed KC est aequalis F, et HD igitur ipsi F est aequalis. si igitur GB ipsi E, et HD ipsi F aequalis erit.

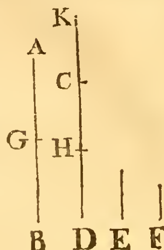


a. 1. Ax. 5.

Sed sit GB multiplex ipsius E, erit HD aeque multiplex ipsius F. Quam multiplex enim est GB ipsius E, tam multiplex fiat CK ipsius F; et quoniam aeque multiplex est AG ipsius E, atque CH ipsius F, aeque multiplex autem est GB ipsius E, atque CK ipsius F, erit [b] AB aeque multiplex ipsius E, atque KH ipsius F. aeque autem multiplex ponitur

a. 2. 5.

ponitur AB ipſius E, atque CD ipſius F; ergo KH aeque multiplex
a. 1. Ax. 5. eſt F, atque CD ejuſdem F. aequalis igitur [a] eſt KH ipſi CD. communis auferatur CH; ergo reliqua KC reliquae HD eſt aequalis. Quam multiplex autem eſt GB ipſius E, tam multiplex eſt KC ipſius F, ſed KC eſt aequalis HD. Ergo tam multiplex eſt HD ipſius F, atque GB ipſius E. ſi igitur duae &c. Q. E. D.



PROP. A. THEOR.

SI prima ad ſecundam eandem habet rationem quam tertia ad quartam, fueritque prima major ſecunda; erit tertia major quarta; et ſi aequalis, aequalis; et ſi minor, minor.

Sumantur enim quaevis aeque multiplices omnium, puta duplae, et, per Definitionem 5tam hujus, ſi dupla primae major fuerit duplâ ſecundae, erit dupla tertiae major duplâ quartae. ſi autem prima major fuerit ſecunda, erit dupla primae major duplâ ſecundae. quare et dupla tertiae major erit duplâ quartae; unde tertia major erit quarta. Ergo ſi prima major fuerit ſecundâ, erit tertia major quarta. ſimiliter ſi prima aequalis fuerit ſecundae, aut ipsâ minor, oſtendetur tertia aequalis quartae, aut ipsâ minor. Q. E. D.

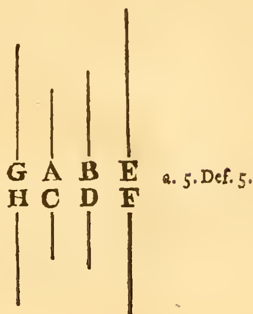
PROP. B.

PROP. B. THEOR.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, et inverſe proportionales erunt.

Sit A ad B, ut C ad D; erit inversè B ad A, ut D ad C.

Sumantur enim ipſarum B, D, aeque multiplices quaecunque E, F; et ipſarum A, C, aliae utcunque aeque multiplices G, H. et primum ſit E major G; erit igitur G minor E; et quoniam eſt A ad B, ut C ad D, et ipſarum A, C aeque multiplices ſumptae ſunt G, H; et ipſarum B, D aliae aeque multiplices E, F; et eſt G minor E, erit H minor F[a]; quare eſt F major H. ſi igitur E major ſit G, et F quam H major erit. ſimiliter, ſi E aequalis fuerit ipſi G, oſtendetur F aequalis ipſi H; et ſi minor, minor. ſuntque E, F ipſarum B, D, utcunque aeque multiplices; et G, H ipſarum A, C, aliae utcunque aeque multiplices. Ergo ut B ad A, ita eſt D ad C[a]. Si igitur quatuor magnitudines proportionales fuerint, et inversè proportionales erunt.



a. 5. Def. 5.

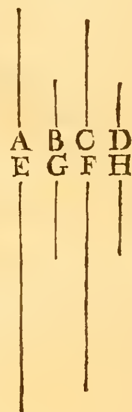
PROP. C.

PROP. C. THEOR.

SI prima aeque multiplex fuerit, vel eadem pars, ſecundae, atque tertia quartae; erit prima ad ſecundam ut tertia ad quartam.

Sit prima A aeque multiplex ſecundae B, atque tertia C quartae D. erit A ad B, ut C ad D.

Sumantur enim ipſarum A, C aeque multiplices quaecunque E, F; ipſarumque B, D, aliae utcunque aeque multiplices G, H. et quoniam A aeque multiplex eſt B, atque C ipſius D; E vero aeque multiplex A, atque F ipſius C, a. 3. 5. erit [a] E aeque multiplex B, atque F ipſius D. ſunt autem G, H ipſarum B, D aeque multiplices; ergo ſi E major fuerit multiplex ipſius B, quam G ejuſdem B, erit et F major multiplex ipſius D, quam H ejuſdem D; hoc eſt ſi E major fuerit G, erit F major H. ſimiliter ſi E aequalis fuerit G, aut ipsâ minor, oſtendetur F aequalis H, aut ipsâ minor. ſunt autem E, F ipſarum A, C utcunque aeque multiplices; et G, H ipſarum B, D aliae utcunque aeque multiplices. Ergo eſt A ad B, ut b. Def. 5. 5. C ad D[b].



Sed ſit prima A eadem pars ſecundae B, atque tertia C quartae D. erit A ad B, ut C ad D. etenim erit B eadem multiplex A, atque D ipſius C; quare per Caſum I. eſt B ad A, ut D ad C, et c. B. 5. invertendo[c], erit A ad B, ut C ad D. ſi igitur prima &c. Q. E. D.



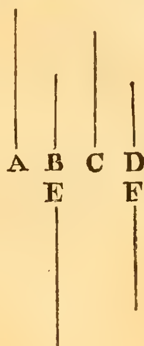
PROP. D.

PROP. D. THEOR.

SI fuerit prima ad ſecundam, ut tertia ad quartam; fueritque prima multiplex, vel pars ſecundae; erit tertia eadem multiplex, vel eadem pars quartae.

Sit A ad B, ut C ad D; ſitque A multiplex ipſius B, erit C eadem multiplex ipſius D.

Sumatur enim E aequalis ipſi A, et quam multiplex eſt A ſive E ipſius B, tam multiplex fiat F ipſius D. Ergo quoniam A ad B eandem habet rationem, quam C ad D, et ſecundae B et quartae D aeque multiplices ſumptae ſunt E, F, erit [a] A ad E, ut C ad F. et eſt A aequalis ipſi E; ergo C aequalis eſt ipſi F[b]. eſt autem F aeque multiplex ipſius D, atque E ſive A ipſius B. Ergo C aeque multiplex eſt D, atque A ipſius B.



a. Cor. 4. 5.
b. Prop. A. 5.

Sed ſit prima A pars ſecundae B, erit tertia C eadem pars quartae D.

Quoniam enim eſt A ad B, ut C ad D, invertendo[c], erit B ad A, ut D ad C. eſt autem A pars ipſius B, hoc eſt B multiplex eſt ipſius A, quare, per caſum praecedentem, D eadem eſt multiplex ipſius C, hoc eſt C eadem pars eſt ipſius D, atque A ipſius B. ſi igitur fuerit prima &c. Q. E. D.

c. B. 5.

PROP. VII. THEOR.

AEQUALES ad eandem, eandem habent rationem; et eadem ad aequales.

Sint aequales magnitudines A, B, alia autem quaevis magnitudo ſit

C. Dico utramque A, B ad C eandem rationem habere; et C ad utramque A, B ſimiliter eandem habere rationem.

Sumantur enim ipſarum A, B utcunque aeque multiplices D, E, et ipſius C alia utcunque multiplex F. quoniam igitur aeque multiplex eſt D ipſius A, atque E ipſius B, eſtque A ipſi B aequalis; erit et D aequalis ipſi E[a]. Ergo ſi D ſuperat F, et E ipſam F ſuperabit; et ſi aequalis, aequalis; et ſi minor, minor. et ſunt D, E quidem ipſarum A, B utcunque aeque multiplices; F vero alia utcunque multiplex ipſius C. erit igitur ut A ad C, ita B ad C[b].

a. 1. Ax. 5.
b. 5. Def. 5.



Dico inſuper C ad utramque ipſarum A, B eandem habere rationem. iiſdem enim conſtructis ſimiliter oſtendemus D ipſi E aequalem eſſe. ſi igitur F ſuperat D, ipſum quoque E ſuperabit; et ſi aequalis, aequalis; et ſi minor, minor. atque eſt F quidem ipſius C utcunque multiplex; D, E vero aliae utcunque aeque multiplices ipſarum A, B. Ergo [b] ut C ad A, ita erit C ad B. Aequales igitur &c. Q. E. D.

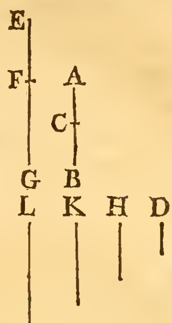
PROP. VIII. THEOR.

INAEQUALIUM magnitudinum major ad eandem, majorem habet rationem quam minor. et eadem ad minorem, majorem habet rationem quam ad majorem.

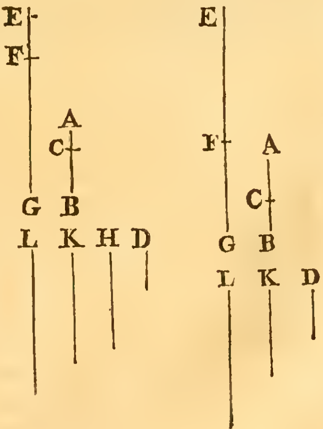
Sint inaequales magnitudines AB, BC, et ſit AB major; alia vero utcunque ſit D. habebit AB ad D majorem rationem quam BC ad D. et D ad BC majorem rationem habebit quam ad AB.

Si ea quae non major eſt ipſarum AC, CB non minor ſit quam D; ſumantur

ſumantur ipſarum AC, CB duplae EF, FG, ut in Fig. 1. ſi vero ea quae non major eſt ipſarum AC, CB minor ſit quam D, (ut in duabus reliquis figuris) ea, ſive fuerit AC ſive CB, multiplicata major aliquando erit quam D. multiplicetur quoad fiat major quam D, et quoties multiplicata fuerit, toties multiplicetur altera; ſitque EF multiplex ipſius AC, FG vero eadem multiplex ipſius CB. utraque igitur EF, FG major eſt quam D. in omnibus autem caſibus, ſumatur ipſius D dupla H, tripla K, et deinceps una amplius, quoad ea quae ſumitur fiat multiplex ipſius D quae primò major eſt ipsâ FG. ſumatur, ſitque L ipſius D multiplex quae primò major eſt FG, K vero ſit ea multiplex ipſius D quae proxime minor eſt quam L.



Quoniam igitur L multiplex eſt ipſius D quae primò major ſit ipsâ FG, non erit K major quam FG, ideoque FG non minor erit quam K. et cum aeque multiplex ſit EF ipſius AC, atque FG ipſius CB, erit [a] et FG aeque multiplex ipſius CB, atque EG ipſius AB; quare EG, FG ipſarum AB, CB ſunt aeque multiplices. oſtenſa autem fuit FG non minor quam K, et ex conſtructione, eſt EF major quam D; ergo tota EG utriſque ſimul K, D major erit. ſed utraque ſimul K, D aequales ſunt ipſi L; ſuperat igitur EG ipſam L; FG vero non ſuperat L; et ſunt EG, FG ip- a. 1. 5.



 ſarum

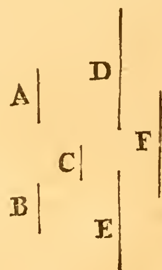
ſarum AB, BC aeque multiplices, et L ipſius D alia quaedam multiplex;
b. Def. 7. 5. ergo AB ad D majorem habet rationem quam BC ad D[b].

Praeterea D ad BC majorem habebit rationem quam ad AB. iiſdem enim conſtructis, ſimiliter oſtendetur L ſuperare FG, ipſam vero EG non ſuperare. atque eſt L multiplex ipſius D, FG vero et EG ſunt aliae quaedam ipſarum CB, AB aeque multiplices. Ergo D ad CB majorem habet rationem quam D ad AB[b]. Inaequalium igitur &c. Q. E. D.

PROP. IX. THEOR.

QUAE ad eandem, eandem rationem habent, inter ſe ſunt aequales; et ad quas eadem eandem rationem habet, ipſae ſunt inter ſe aequales.

Habeat enim utraque ipſarum A, B ad C eandem rationem; dico A ipſi B aequalem eſſe. nam ſi non ſit aequalis, altera ipſarum eſt major; ſit A major; ſunt igitur, ut oſtenſum fuit in propoſitione praecedente, quaedam ipſarum A, B aeque multiplices, et quaedam ipſius C multiplex tales ut multiplex ipſius A ſuperet multiplicem ipſius C, multiplex vero ipſius B eandem non ſuperet. ſumantur, et ſint D, E ipſarum A, B aeque multiplices, F vero ipſius C multiplex, ita ut D ſuperet F, E vero eandem F non ſuperet. quoniam vero eſt A ad C, ut B ad C, et ipſarum A, B ſumptae ſunt quaedam aeque multiplices D, E, et ipſius C ſumpta eſt quaedam
a. 5. Def. 5. multiplex F, et eſt D major F, erit [a] E major F; eſt autem et E non major F, quod fieri non poteſt. non igitur inaequalis eſt A ipſi B; ergo aequalis erit.



Habeat

Habeat rursus C ad utramque ipsarum A, B eandem rationem. Dico A aequalem esse ipsi B. si enim non sit, altera ipsarum est major; sit major A, est igitur [b] quaedam multiplex F ipsius C, suntque quaedam ipsarum B, A aeque multiplices E, D, tales ut F superet E non vero ipsam D superet. Quoniam vero est C ad B, ut C ad A, et est F multiplex primae C major E multiplici secundae B, erit [a] F multiplex tertiae C major D multiplici quartae A. est autem et F non major D. Quod fieri non potest. Ergo est A aequalis ipsi B. Quae igitur ad eandem &c. Q. E. D.

b. 8. 5.

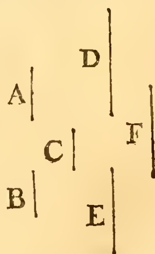
a. 5. Def. 5.

PROP. X. THEOR.

AD eandem magnitudinem rationem habentium, quae majorem rationem habet, illa major est; ad quam vero eadem majorem habet rationem, illa minor est.

Habeat enim A ad C majorem rationem, quam B ad C; dico A quam B majorem esse. Quoniam enim A ad C majorem habet rationem, quam B ad C, sunt [a] quaedam ipsarum A, B aeque multiplices, et ipsius C quaedam multiplex, ut multiplex quidem ipsius A superet multiplicem C, multiplex vero B non superet eandem. sumantur, et sint ipsarum A, B aeque multiplices D, E; ipsius vero C multiplex sit F, ita ut D quidem superet F, E autem non superet eandem F. est igitur D major quam E. et quoniam D, E ipsarum A, B sunt aeque multiplices, et est D major quam E, erit A major quam B [b].

a. Def. 7. 5.



b. Ax. 4. 5.

Habeat rursus C ad B majorem rationem quam C ad A. Dico B minorem esse quam A. est enim [a] quaedam multiplex F ipsius C, suntque

que ipſarum B, A quaedam aeque multiplices E, D, ita ut F ſuperet E, non vero ſuperet ipſam D. eſt igitur E minor quam D; et quoniam
b. Ax. 4. 5. E, D ipſarum B, A ſunt aeque multiplices, erit [b] B minor quam A. ad eandem igitur &c. Q. E. D.

PROP. XI. THEOR.

QUAE eidem eaedem ſunt rationes, et inter ſe eaedem ſunt.

Sint enim ut A ad B, ita C ad D; ut autem C ad D, ita E ad F. Dico ut A ad B, ita E ad F.

Sumantur enim ipſarum quidem A, C, E aeque multiplices quaevis G, H, K; ipſarum vero B, D, F aliae utcunque aeque multiplices, L, M, N. Quoniam igitur eſt ut A ad B, ita C ad D, et ſumptae ſunt ipſarum A, C aeque multiplices G, H; et ipſarum B, D aliae aeque
a. 5. Def. 5. multiplices L, M; ſi G ſuperat L, et H ipſam M ſuperabit [a]; et ſi aequalis, aequalis; et ſi minor, minor. rurſus quoniam eſt ut C ad D, ita E ad F, et ſumptae ſunt ipſarum C, E aeque multiplices H, K; ipſarum vero D, F aliae aeque multiplices M, N, ſi H ſuperat M, et K ipſam N ſuperabit [a]; et ſi aequalis, aequalis; et ſi minor, minor. ſed ſi G ſuperat L, oſtenſum eſt H ſuperare M; et ſi aequalis, aequalis; et ſi minor, minor; quare ſi G ſuperat L, et K ipſam N ſuperabit; et ſi aequalis, aequalis; et ſi minor, minor. et ſunt G, K quidem ipſarum

A, E

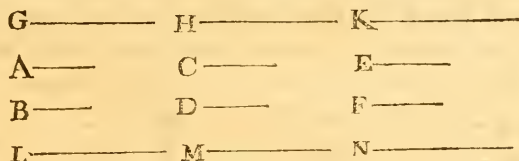
A, E utcunque aeque multiplices; L, N vero ipſarum B, F aliae utcunque aeque multiplices. Ergo ut A ad B, ita erit E ad F. Quae igitur eidem &c. Q. E. D.

PROP. XII. THEOR.

SI quotcunque magnitudines proportionales fuerint; ut una antecedentium ad unam conſequentium, ita erunt antecedentes omnes ſimul ad omnes conſequentes ſimul.

Sint quotcunque magnitudines proportionales A, B, C, D, E, F; et ut A ad B, ita ſit C ad D, et E ad F. Dico ut A ad B, ita eſſe A, C, E ad B, D, F.

Sumantur enim ipſarum A, C, E utcunque aeque multiplices G, H, K, et ipſarum B, D, F aliae utcunque aeque multiplices L, M, N. Quoniam igitur ut A ad B, ita eſt C ad D, et E ad F; et ſumptae ſunt ipſa-



rum quidem A, C, E aeque multiplices G, H, K, ipſarum vero B, D, F aliae aeque multiplices L, M, N; ſi [a] G ſuperat L, et H ipſam M ſuperabit, et K ipſam N; et ſi aequalis, aequalis; et ſi minor, minor. Quare et ſi G ſuperat L, ſuperabunt et G, H, K ipſas L, M, N; et ſi aequalis, aequales; et ſi minor, minores. ſuntque G, et G, H, K ipſarum A, et A, C, E utcunque aeque multiplices, quoniam ſi fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, aequalium numero, ſingulae

a. 5. Def. 5.

ſingulae ſingularum aeque multiplices; quam multiplex eſt una magnitudo
b. 1. 5. unius, tam multiplices [b] erunt et omnes omnium. eadem ratione L, et
L, M, N ipſarum B, et B, D, F ſunt utcunque aeque multiplices. Eſt
a. Def. 5. 5. igitur [a] ut A ad B, ita A, C, E ad B, D, F. Quare ſi &c. Q. E. D.

PROP. XIII. THEOR.

SI prima ad ſecundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam, tertia autem ad quartam majorem rationem habeat quam quinta ad ſextam; et prima ad ſecundam majorem habebit rationem quam quinta ad ſextam.

Prima enim A ad ſecundam B eandem rationem habeat quam tertia C ad quartam D, tertia autem C ad quartam D majorem habeat rationem quam quinta E ad ſextam F. Dico et primam A ad ſecundam B majorem rationem habere, quam quintam E ad ſextam F.

Quoniam enim C ad D majorem habet rationem quam E ad F, ſunt quaedam ipſarum C, E aeque multiplices, et ipſarum D, F aliae

M——— G——— H———
A—— C—— E——
B—— D—— F——
N——— K——— L———

quaedam aeque multiplices, ut multiplex quidem C ſuperet multiplicem
a. 7. Def. 5. D; multiplex vero E non ſuperet multiplicem ipſius F [a]. ſumantur, et
ſint ipſarum C, E aeque multiplices G, H; et ipſarum D, F aliae aeque multiplices K, L; ita ut G quidem ſuperet K, H vero ipſam L non ſuperet; et quam multiplex eſt G ipſius C, tam multiplex fiat M ipſius A; quam multiplex autem eſt K ipſius D, tam multiplex fiat N

ipſius

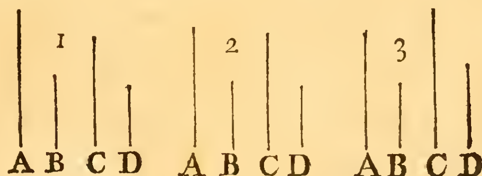
ipſius B. et quoniam eſt ut A ad B, ita C ad D, et ſumptae ſunt ipſarum A, C aeque multiplices M, G, et ipſarum B, D aliae quaedam aeque multiplices N, K; ſi M ſuperat N, et G ipſam K ſuperabit; et ſi aequalis, aequalis; et ſi minor, minor. ſed G ſuperat K, ergo et M ipſam N ſuperabit. H vero non ſuperat L; ſuntque M, H ipſarum A, E aeque multiplices, et N, L ipſarum B, F aliae quaedam aeque multiplices. Ergo A ad B majorem rationem habebit [a] quam E a. 7. Def. 5.
ad F. ſi igitur &c. Q. E. D.

Cor. Et ſi prima ad ſecundam majorem rationem habeat, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam eandem rationem habeat, quam quinta ad ſextam; ſimiliter oſtendetur primam ad ſecundam majorem rationem habere, quam quintam ad ſextam.

PROP. XIV. THEOR.

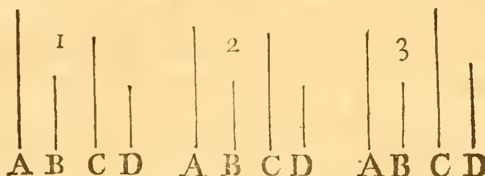
SI prima ad ſecundam eandem habeat rationem, quam tertia ad quartam; prima autem major ſit quam tertia; et ſecunda quam quarta major erit; et ſi aequalis, aequalis; et ſi minor, minor.

Prima enim A ad ſecundam B eandem rationem habeat, quam tertia C ad quartam D; major autem ſit A quam C. Dico et B quam D majorem eſſe.



Quoniam enim A major eſt quam C, et alia eſt utcunque magnitudo

a. 8. 5. B, habebit [a] A ad B majorem rationem quam C ad B. sed ut C ad
b. 13. 5. D, ita est A ad B; ergo et C ad D majorem habebit [b] rationem quam
c. 10. 5. C ad B. ad quam vero eadem majorem rationem habet, illa minor [c] est. quare D est minor quam B, ac propterea B quam D major erit.



Secundo, Sit A aequalis ipsi C; erit B aequalis ipsi D. quoniam e-
d. 9. 5. nim est A ad B, ut C hoc est A ad D, erit B aequalis ipsi D[d].

Tertio, Sit A minor C; erit B minor D. Etenim erit C major A, et quoniam est C ad D, ut A ad B, erit D major B per Casum primum. quare B minor erit D. si igitur prima &c. Q. E. D.

PROP. XV. THEOR.

PARTES inter se comparatae eandem habent rationem, quam habent earum aeque multiplices.

Sit enim AB aeque multiplex C, atque DE ipsius F. Dico ut C ad F, ita esse AB ad DE.



Quoniam enim aeque multiplex est AB ipsius C, atque DE, ipsius F; quot magnitudines sunt in AB aequales ipsi C, totidem erunt et in DE aequales F. Dividatur AB in magnitudines ipsi C aequales, quae sint AG, GH, HB; et DE dividatur in magnitudines aequales F, videlicet in DK, KL, LE. erit igitur ipsarum AG, GH, HB multitudo aequalis multi-

tudini

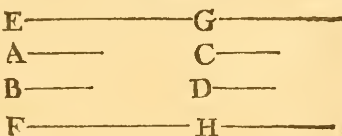
tudini ipſarum DK, KL, LE. et quoniam aequales ſunt AG, GH, HB, ſuntque DK, KL, LE inter ſe aequales; crit ut AG ad DK, ita GH ad KL, et HB ad LE[a]. atque ut una antecedentium ad unam con- a. 7. 5.
ſequentium, ita erunt omnes antecedentes ad omnes conſequentes[b]; eſt b. 12. 5.
igitur ut AG ad DK, ita AB ad DE. ſed AG ipſi C eſt aequalis, et DK ipſi F. Ergo ut C ad F, ita crit AB ad DE. Partes igitur &c. Q. E. D.

PROP. XVI. THEOR.

SI quatuor magnitudines quae omnes ejuſdem ſunt generis proportionales fuerint, et permutatae proportionales erunt.

Sint quatuor magnitudines proportionales A, B, C, D, ſitque ut A ad B, ita C ad D. Dico et permutatas proportionales eſſe, videlicet ut A ad C, ita B ad D.

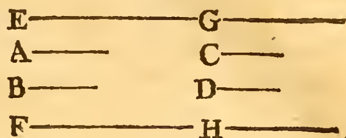
Sumantur enim ipſarum quidem A, B aeque multiplices quaecunque E, F; ipſarum vero C, D, aliae utcunque aeque multiplices G, H. et quoniam aeque multiplex eſt E ipſius A, atque F ipſius B; partes autem inter ſe comparatae



eandem habent [a] rationem quam habent earum aeque multiplices; erit ut A ad B, ita E ad F. ut autem A ad B, ita C ad D. Ergo et a. 15. 5.
ut C ad D ita E ad F[b]. rurſus, quoniam G, H ſunt ipſarum C, D b. 11. 5.
aeque multiplices, erit [a] ut C ad D, ita G ad H; ut autem C ad D, ita E ad F. Ergo et ut E ad F, ita G ad H[b]. Quod ſi quatuor magnitudines proportionales ſint, prima autem major ſit quam tertia, et ſecunda quam quarta major erit; et ſi aequalis, aequalis; et ſi minor, minor[c].

c. 14. 5. minor[c]. ſi igitur E ſuperat G, et F ipſam H ſuperabit; et ſi aequalis, aequalis; et ſi minor, minor. ſuntque E, F ipſarum A, B, utcunque aeque multiplices, et G, H ipſarum C, D aliae utcunque aeque multiplices. Ergo [d] ut A ad C, ita B ad D. ſi igitur quatuor &c. Q. E. D.

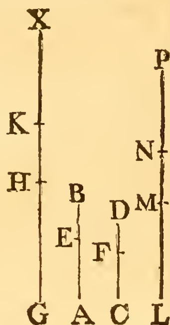
d. Def. 5. 5



PROP. XVII. THEOR.

SI compoſitae magnitudines ſint proportionales, et diviſae proportionales erunt.

Sint compoſitae magnitudines proportionales AB, BE; CD, DF, hoc eſt ut AB ad BE, ita ſit CD ad DF. Dico etiam diviſas proportionales eſſe, videlicet ut AE ad EB, ita eſſe CF ad FD.



Sumantur enim ipſarum AE, EB, CF, FD utcunque aeque multiplices GH, HK, LM, MN; ipſarum vero EB, FD rurſus ſumantur aliae utcunque aeque multiplices KX, NP. et quoniam aeque multiplex eſt GH ipſius AE, atque HK ipſius EB;
a. 1. 5. erit [a] GH ipſius AE aeque multiplex, atque GK ipſius AB. aeque autem multiplex eſt GH ipſius AE, atque LM ipſius CF. ergo GK aeque multiplex eſt AB, atque LM ipſius CF. rurſus, quoniam aeque multiplex eſt LM ipſius CF, atque MN ipſius FD; erit [a] LM aeque multiplex CF, atque LN ipſius CD. ſed aeque multiplex erat LM ipſius CF, atque GK ipſius AB. aeque igitur multiplex eſt GK ipſius AB, atque LN ipſius CD; quare GK, LN ipſarum AB, CD aeque multiplices

multiplices erunt. rurſus, quoniam aeque multiplex eſt HK ipſius EB, atque MN ipſius FD; eſt autem et KX ipſius EB aeque multiplex, atque NP ipſius FD; et compoſita HX ipſius EB aeque multiplex erit [b] atque compoſita MP ipſius FD. et quoniam eſt ut AB ad BE, ita CD ad DF, et ſumptae ſint ipſarum quidem AB, CD aeque multiplices GK, LN, ipſarum vero EB, FD aliae quaedam aeque multiplices HX, MP; ſi [c] GK ſuperat HX, et LN ſuperabit MP; et ſi aequalis, aequalis; et ſi minor, minor. ſi autem GH ſuperat KX, additâ communi HK, ſuperabit GK ipſam HX; quare et LN ſuperabit MP; communique MN ablatâ, ſuperabit LM ipſam NP. Quare ſi GH ſuperat KX, et LM ſuperabit ipſam NP. ſimiliter demonſtrabimus et ſi GH ſit aequalis KX, et LM ipſi NP eſſe aequalem; et ſi minor, minorem. ſunt autem GH, LM ipſarum AE, CF utcunque aeque multiplices, et ipſarum EB, FD aliae utcunque aeque multiplices ſunt KX, NP. ergo ut AE ad EB, ita erit CF ad FD. ſi igitur compoſitae magnitudines ſint &c. Q. E. D.

b. 2. 5.

c. 5. Def. 5.

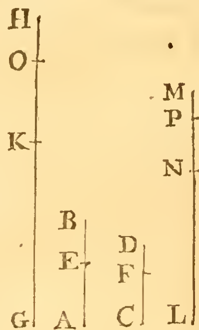
PROP. XVIII.

PROP. XVIII. THEOR.

SI divisae magnitudines sint proportionales, et compositae proportionales erunt.

Sint divisae magnitudines proportionales AE, EB; CF, FD, hoc est ut AE ad EB, ita sit CF ad FD; dico etiam compositas proportionales esse, videlicet ut AB ad BE, ita esse CD ad DF.

Sumantur enim ipsarum AB, BE, CD, DF utcunque aeque multiplices GH, HK, LM, MN; ipsarum autem BE, DF aliae rursus sumantur utcunque aeque multiplices KO, NP. et quoniam KO, NP aeque multiplices sunt ipsarum BE, DF; et KH, NM earundem sunt aeque multiplices, si KO multiplex ipsius BE major sit KH multiplici ejusdem BE, erit et NP multiplex ipsius DF major NM multiplici ejusdem DF; et si KO aequalis sit KH, erit NP aequalis NM; et si minor, minor.

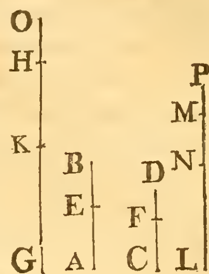


Sit primum KO non major KH, igitur erit NP non major NM. et quoniam GH, HK aeque multiplices sunt ipsarum AB, BE, et est
* 3. Ax. 5. AB major BE, erit GH major * KH; est autem KO non major KH; quare GH major est KO. similiter ostendetur LM majorem esse NP. Ergo si KO non major sit KH, erit GH multiplex ipsius AB semper major KO multiplici ipsius BE, et simul LM multiplex ipsius CD major erit NP multiplici ipsius DF.

Sed sit KO major quam KH; erit igitur, ut ostensum, NP major NM. et quoniam est tota GH aeque multiplex totius AB, atque ablata

lata HK ablatae BE, erit [a] et reliqua GK reliquae AE aeque multiplex atque GH ipſius AB, hoc eſt atque LM ipſius CD. ſimiliter quoniam LM aeque multiplex eſt ipſius CD, atque ablata MN ablatae DF, erit [a] reliqua LN aeque multiplex reliquae CF, atque LM ipſius CD. ſed aeque multiplex oſtenſa eſt LM ipſius CD, atque GK ipſius AE; aeque igitur multiplex eſt GK ipſius AE, atque LN ipſius CF. quare GK, LN ipſarum AE, CF ſunt aeque multiplices. quoniam vero KO, NP ipſarum BE, DF ſunt aeque multiplices, et ablatae ſunt KH, NM earundem aeque multiplices, erunt reliquae HO, MP vel aequales ipſis BE, DF, vel earundem aeque multiplices[b]. ſint primùm HO, MP aequales ipſis BE, DF; et quoniam eſt AE ad EB, ut CF ad FD, et ſumptae ſunt GK, LN ipſarum AE, CF aeque multiplices, erit [c] GK ad EB, ut LN ad FD. eſt autem HO aequalis EB, et MP ipſi FD; quare eſt GK ad HO, ut LN ad MP. Ergo ſi GK ſuperat HO, ſuperabit LN ipſam MP; et ſi aequalis, aequalis; et ſi minor, minor[d].

a. 5. 5.

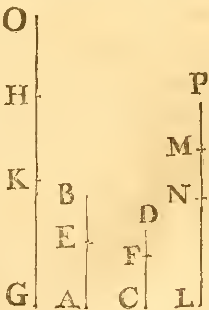


b. 6. 5.

c. Cor. 4. 5.

d. A. 5.

Sed ſint HO, MP ipſarum EB, FD aeque multiplices; et quoniam eſt AE ad EB, ut CF ad FD, et ſumptae ſunt ipſarum AE, CF aeque multiplices GK, LN; ipſarum vero EB, FD aliae quaedam aeque multiplices HO, MP; ſi GK ſuperat HO, et LN ſuperabit MP; et ſi aequalis, aequalis; et ſi minor, minor[e]; quod etiam in caſu praecedente oſtenſum fuit. ſi igitur GH ſuperat KO, ablatà communi KH, ſuperabit GK ipſam HO; quare et LN ſuperabit MP; et addità communi NM, ſuperabit LM ipſam NP. Ergo



e. 5. Def. 5.

ſi GH

ſi GH ſuperat KO, et LM ipſam NP ſuperabit. ſimiliter demonſtrabitur ſi GH aequalis ſit KO, et LM ipſi NP aequalem eſſe; et ſi minor, minorem. et in caſu in quo KO non major eſt KH, oſtenſum fuit GH ſemper majorem eſſe KO, et ſimul LM majorem NP. ſunt autem GH, LM ipſarum AB, CD utcunque aeque multiplices, et KO, NP ipſarum BE, DF aliae utcunque
e. 5. Def. 5. aeque multiplices; ergo [e] ut AB ad BE, ita eſt CD ad DF. Quare ſi diviſae &c. Q. E. D.

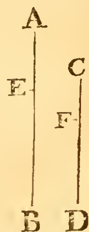


PROP. XIX. THEOR.

SI fuerit ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam; et reliqua ad reliquam erit ut tota ad totam.

Sit enim ut tota AB ad totam CD, ita ablata AE ad ablatam CF. Dico et reliquam EB ad reliquam FD ita eſſe ut tota AB ad totam CD.

a. 16. 5. Quoniam enim eſt ut tota AB ad totam CD, ita AE ad CF; et per-
b. 17. 5. mutando erit [a] ut BA ad AE, ita DC ad CF. quoniam vero compoſitae magnitudines ſunt proportionales, et diviſae proportionales erunt [b]; ut igitur BE ad EA, ita DF ad FC; rurſuſque permutando, ut BE ad DF, ita EA ad FC. ſed ut AE ad CF, ita poſita eſt AB ad CD. et reliqua igitur EB erit ad reliquam FD, ut tota AB ad totam CD. quare ſi &c. Q. E. D.



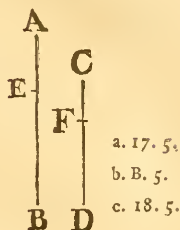
Cor. Si fuerit ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam;

erit

erit et reliqua ad reliquam ut ablata ad ablatam. hoc enim in ipſa demonſtratione oſtenſum eſt.

PROP. E. THEOR.

SI quatuor magnitudines proportionales ſint, et convertendo proportionales erunt.



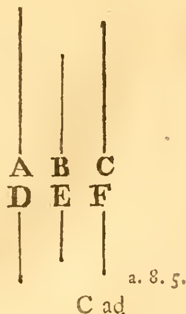
Sit enim ut AB ad BE, ita CD ad DF; convertendo erit ut BA ad AE, ut DC ad CF.

Quoniam enim ut AB ad BE, ita CD ad DF, dividendo [a] erit AE ad EB, ut CF ad FD; et invertendo [b], BE ad EA, ut DF ad FC. Quare componendo [c], erit BA ad AE, ut DC ad CF. ſi igitur &c. Q. E. D.

a. 17. 5.
b. B. 5.
c. 18. 5.

PROP. XX. THEOR.

SI ſint tres magnitudines, et aliae ipſis numero aequales, quae binae ſumantur in eadem ratione; prima autem major ſit quam tertia; et quarta quam ſexta major erit; et ſi aequalis, aequalis; et ſi minor, minor.



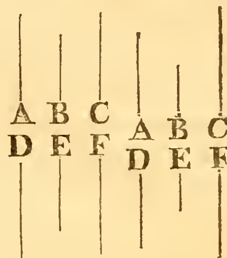
Sint tres magnitudines A, B, C, et aliae ipſis numero aequales D, E, F, quae binae ſumptae ſunt in eadem ratione; ſit ſcilicet ut A ad B, ita D ad E; et ut B ad C, ita E ad F; major autem ſit A quam C. Dico et D quam F majorem eſſe; et ſi aequalis, aequalem; et ſi minor, minorem.

Quoniam enim A major eſt quam C, alia vero utcunque eſt B, et major ad eandem majorem habet rationem quam minor [a]; habebit A ad B majorem rationem, quam

a. 8. 5.

b. 13. 5. C ad B. ſed ut D ad E, ita A ad B; ergo [b] et D ad E majorem habet rationem, quam C ad B. et quoniam eſt B ad C, ut E ad F, invertendo erit C ad B, ut F ad E; oſtenſa autem eſt D ad E majo-
c. Cor. 13. 5. rem rationem habere quam C ad B; ergo [c] D ad E majorem habet rationem quam F ad E. ad eandem vero rationem habentium, quae
d. 10. 5. majorem habet rationem illa major eſt [d]. major igitur eſt D quam F.

Secundo, Sit A aequalis ipſi C; erit et D aequalis ipſi F. Quoniam enim aequales ſunt A, C, et alia utcunque
e. 7. 5. eſt B, erit [e] A ad B, ut C ad B. eſt autem A ad B, ut D ad E; et C ad B, ut F ad E;
f. 11. 5. ergo [f] eſt D ad E, ut F ad E; et propterea
g. 9. 5. [g] D aequalis eſt ipſi F.



Tertio, Sit A minor C, erit et D minor F. quoniam enim A minor eſt C, erit C major quam A. et quoniam ex hypotheſi, et invertendo, eſt C ad B, ut F ad E; et B ad A, ut E ad D; et eſt C major A; erit et F major D, per Caſum primum, et ob id erit D minor F. ſi igitur &c. Q. E. D.

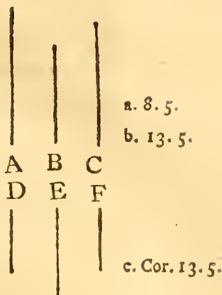
PROP. XXI. THEOR.

SI ſint tres magnitudines, et aliae ipſis numero aequales, quae binae ſumantur in eadem ratione; ſit autem perturbata earum proportio; prima autem major ſit quam tertia, et quarta quam ſexta major erit; et ſi aequalis, aequalis; et ſi minor, minor.

Sint tres magnitudines A, B, C, et aliae ipſis numero aequales D, E, F quae binae ſumptae ſint in eadem ratione; ſit autem perturbata earum proportio, videlicet ut A quidem ad B, ita E ad F; ut vero B

ad

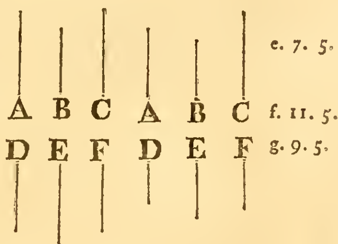
ad C, ita D ad E. major autem ſit A quam C. Dico et D quam F majorem eſſe; et ſi aequalis, aequalem; et ſi minor, minorem.



Quoniam enim major eſt A quam C, alia vero eſt B; habebit [a] A ad B majorem rationem quam C ad B. ſed ut E ad F, ita A ad B; ergo [b] et E ad F majorem habebit rationem, quam C ad B. quoniam vero eſt B ad C, ut D ad E, invertendo erit C ad B, ut E ad D. oſtenſa autem eſt E ad F majorem rationem habere quam C ad B; ergo [c] E ad F majorem habet rationem quam E ad D. ad quam vero eadem majorem habet rationem illa minor eſt [d]; minor igitur eſt F quam D, et propterea D quam F major erit.

a. 8. 5.
b. 13. 5.
c. Cor. 13. 5.
d. 10. 5.

Secundo, Sit A aequalis ipſi C; erit et D aequalis ipſi F. Quoniam enim aequales ſunt A, C, alia vero eſt B, erit [e] A ad B, ut C ad B. eſt autem A ad B, ut E ad F; et C ad B, ut E ad D. ergo [f] eſt E ad F, ut F ad D. aequalis igitur eſt D ipſi F [g].



e. 7. 5.
f. 11. 5.
g. 9. 5.

Tertio, Sit A minor C; erit et D minor F. quoniam enim A minor eſt C, erit C major A. et quoniam ex hypotheſi, et invertendo, eſt C ad B, ut E ad D; et B ad A, ut F ad E; et eſt C major A, erit F major D per Caſum primum; et ob id erit D minor F. ſi igitur &c. Q. E. D.

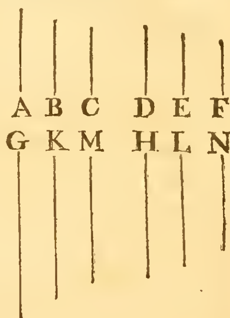
 PROP. XXII.

PROP. XXII. THEOR.

SI ſint quotcunque magnitudines, et aliae ipſis numero aequales, quae binae ſumantur in eadem ratione; et ex aequali in eadem ratione erunt.

Sint primùm tres magnitudines A, B, C, et aliae ipſis numero aequales D, E, F, binae ſumptae in eadem ratione, hoc eſt ut A quidem ad B, ita D ad E; ut autem B ad C, ita E ad F. Dico et ut A ad C, ita eſſe D ad F.

Sumantur enim ipſarum quidem A, D aeque multiplices utcunque G, H; ipſarum vero B, E aliae utcunque aeque multiplices K, L; et ipſarum C, F aliae utcunque aeque multiplices M, N. Quoniam igitur eſt ut A ad B, ita D ad E, et ſumptae ſunt ipſarum A, D aeque multiplices G, H, et ipſarum B, E aliae
a. 4. 5. aeque multiplices K, L; erit [a] ut G ad K, ita H ad L. eadem quoque ratione erit ut K ad M, ita L ad N. et cum ſint tres magnitudines G, K, M, et aliae ipſis numero aequales H, L, N binae ſumptae et in eadem ratione; ſi G ſuperat M, et H ipſam N ſuperabit; et ſi aequalis, aequalis; et ſi minor,
b. 20. 5. minor [b]. ſuntque G, H ipſarum A, D utcunque aeque multiplices, et M, N ipſarum C, F, aliae utcunque aeque multiplices. ut igitur A ad
c. 5. Def. 5. C, ita erit [c] D ad F.



Sint jam quatuor magnitudines A, B, C, D, et aliae ipſis numero aequales E, F, G, H quae binae ſumptae ſunt in eadem ratione; videlicet ut A ad B, ita E

A.	B.	C.	D.
E.	F.	G.	H.

ad

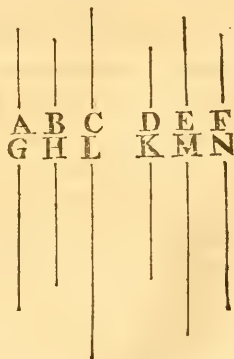
ad F; ut vero B ad C, ita F ad G; et ut C ad D, ita G ad H; erit A ad D, ut E ad H.

Quoniam enim tres ſunt magnitudines A, B, C et aliae ipſis numero aequales, E, F, G quae binae ſumptae ſunt in eadem ratione, erit, per Caſum primum, A ad C, ut E ad G; eſt autem et C ad D, ut G ad H; quare rurſus per Caſum primum, eſt A ad D, ut E ad H. et ſic quotcunque fuerint magnitudines. Quare ſi &c. Q. E. D.

PROP. XXIII. THEOR.

SI ſint quotcunque magnitudines, et aliae ipſis numero aequales, quae binae ſumantur in eadem ratione; ſit autem perturbata ſeu inordinata earum proportio: et ex aequali in eadem ratione erunt.

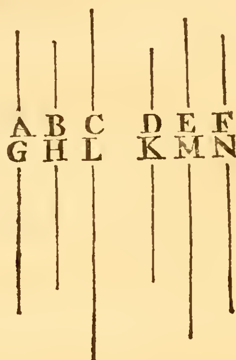
Sint primum tres magnitudines A, B, C, et aliae ipſis numero aequales, binae ſumptae et in eadem ratione D, E, F; ſit autem perturbata earum proportio, hoc eſt ſit ut A ad B, ita E ad F; et ut B ad C, ita D ad E. Dico ut A ad C, ita eſſe D ad F.



Sumantur ipſarum quidem, A, B, D utcunque aeque multiplices G, H, K; ipſarum vero C, E, F aliae utcunque aeque multiplices L, M, N. et quoniam G, H aeque multiplices ſunt ipſarum A, B, partes autem eandem habent rationem quam habent earum aeque multiplices[a]; erit ut A ad B, ita G ad H. et ſimili ratione ut E ad F, ita M ad N. atque eſt ut A ad B, ita E ad F. ut igitur G ad H, ita [b] M ad N. et quoniam

a. 15. 5.
b. 11. 5.

quoniam eſt ut B ad C, ita D ad E, et ſumptae ſunt ipſarum B, D aeque multiplices H, K, ipſarum vero C, E, aliae aeque multiplices
c. 4. 5. L, M; erit [c] ut H ad L, ita K ad M. oſtenſum autem eſt et ut G ad H, ita eſſe M ad N. quoniam igitur tres ſunt magnitudines G, H, L, et



aliae ipſis numero aequales K, M, N binae ſumptae in eadem ratione,
d. 21. 5. eſtque perturbata earum proportio; ſi [d] G ſuperat L, et K ipſam N ſuperabit; et ſi aequalis, aequalis; et ſi minor, minor. ſunt autem G, K, ipſarum A, D, utcunque aeque multiplices; et L, N utcunque aeque
e. Def. 5. 5. multiplices ipſarum C, F. ut igitur [e] A ad C, ita D ad F.

Sint jam quatuor magnitudines A, B, C, D et aliae ipſis numero aequales E, F, G, H quae binae ſumptae in eadem ſunt ratione; ſit autem perturbata earum proportio, videlicet ut A ad B, ita G ad H; ut vero B ad C, ita F ad G; et ut C ad D, ita E ad F. erit A ad D, ut E ad H.

A. B. C. D.
E. F. G. H.

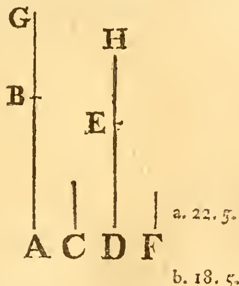
Quoniam enim tres ſunt magnitudines A, B, C et aliae ipſis numero aequales F, G, H quae binae ſumptae ſunt in eadem ratione, eſtque perturbata

perturbata earum proportio; erit, per Casum primum, ut A ad C, ita F ad H; est autem C ad D, ut E ad F; quare, rursus per Casum primum, est A ad D, ut E ad H. et sic quotcunque fuerint magnitudines. Quare si fuerit &c. Q. E. D.

PROP. XXIV. THEOR.

SI prima ad secundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam; habeat autem et quinta ad secundam rationem eandem quam sexta ad quartam; et composita prima cum quinta ad secundam eandem rationem habebit, quam tertia cum sexta ad quartam.

Prima enim AB ad secundam C eandem habeat rationem, quam tertia DE ad quartam F; habeat autem et quinta BG ad secundam C rationem eandem quam sexta EH ad quartam F. Dico et compositam primam cum quinta AG ad secundam C eandem rationem habere, quam tertia cum sexta DH ad quartam F.



Quoniam enim est ut BG ad C, ita EH ad F; erit invertendo C ad BG, ut F ad EH. et quoniam ut AB ad C, ita est DE ad F; ut autem C ad BG, ita F ad EH; erit [a] ex aequali ut AB ad BG, ita DE ad EH. et quoniam divisae magnitudines sunt proportionales, et compositae proportionales erunt[b]; ut igitur AG ad GB, ita est DH ad HE. sed et ut GB ad C, ita HE ad F. ergo ex aequali[a], ut AG ad C, ita DH ad F. si igitur &c. Q. E. D.

a. 22. 5.

b. 18. 5.

Cor. 1. Manente hypothesi Propositionis, erit excessus primae et quintae ad secundam, ut excessus tertiae et sextae ad quartam. Demonstratio

monſtratio eadem eſt cum ea Propoſitionis dummodo vice componendo utatur dividendo.

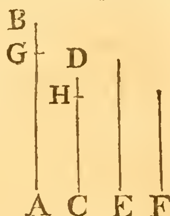
Cor. 2. Ipſa autem Propoſitio vera eſt de quotcunque magnitudinibus, quarum priores ad communem ſecundam eaſdem habent rationes quas habent reliquae ad communem quartam, ſingulae ſc. priorum ad ſecundam, eandem quam ſingulae reliquarum ad quartam; ut patet.

PROP. XXV. THEOR.

SI quatuor magnitudines fuerint proportionales, maxima ipſarum et minima duabus reliquis majores erunt.

Sint quatuor magnitudines proportionales AB, CD, E, F; et ſit ut AB ad CD, ita E ad F. ſit autem maxima ipſarum AB, et propterea
a. A. et 14. 5. [a] F minima. Dico AB et F ipſis CD et E majores eſſe.

Ponatur enim ipſi quidem E aequalis AG, ipſi vero F aequalis CH. Quoniam igitur eſt ut AB ad CD, ita E ad F; eſtque AG aequalis E, et CH aequalis F; erit ut AB ad CD, ita AG ad CH. et quoniam eſt ut tota AB ad totam CD, ita ablata AG ad ablatam CH; erit et reliqua GB
b. 19. 5. ad reliquam HD, ut tota AB ad totam [b] CD. ma-
c. A. 5. jor autem eſt AB quam CD; ergo [c] et GB major erit quam HD. et quoniam AG aequalis eſt ipſi E, CH vero ipſi F; erunt AG et F aequales ipſis CH et E. inaequalibus igitur exiſtentibus GB, HD, quarum major eſt GB, ſi addantur AG et F ipſi quidem GB, ipſi vero HD addantur CH et E; fient AB et F ipſis CD et E majores. ſi igitur quatuor &c. Q. E. D.



PROP. F.

PROP. F. THEOR.

RATIONES ex rationibus inter se iisdem compositae, sunt inter se eaedem.

Sit enim ut A ad B, ita D ad E; ut vero B ad C, ita E ad F. erit ratio composita ex rationibus A ad B, et B ad C, hoc est, per definitionem rationis compositae, ratio A ad C, eadem rationi D ad F, quae sc. composita est ex rationibus D ad E, et E ad F.

A.	B.	C.
D.	E.	F.

Quoniam enim tres sunt magnitudines A, B, C et aliae ipsis numero aequales D, E, F quae binae sumptae in eadem sunt ratione, erit [a] ex aequali A ad C, ut D ad F. a. 22. 5.

Rursus sit ut A ad B, ita E ad F; ut vero B ad C, ita D ad E; erit igitur ex aequali in proportione perturbata [b], A ad C, ut D ad F, hoc est ratio A ad C, quae sc. composita est ex rationibus A ad B, et B ad C, eadem est rationi D ad F, quae composita est ex rationibus D ad E, et E ad F. et similiter si fuerint plures rationes in utroque casu. Rationes igitur &c. Q. E. D. b. 23. 5.

A.	B.	C.
D.	E.	F.

PROP. G. THEOR.

SI rationes quaedam eaedem sint quibusdam rationibus, singulae singulis; ratio quae composita est ex rationibus quae eaedem sunt rationibus prioribus, singulae singulis, eadem erit rationi quae composita est ex rationibus quae eaedem sunt posterioribus, singulae singulis.

Sit ut A ad B, ita E ad F; ut vero C ad D, ita G ad H. sitque

ut A ad B, ita K ad L; ut vero C ad D, ita L ad M. ratio igitur K ad M, per Definitionem rationis compoſitae, compoſita eſt ex rationibus K ad L, et L ad M, quae eaedem ſunt rationibus A ad B, et C ad D. ſitque praeterea ut E ad F, ita N ad O, ut vero G ad H, ita O ad P; ratio igitur N ad P compoſita eſt ex rationibus N ad O, et O ad P, quae eaedem ſunt rationibus E ad F, et G ad H. et oſtendendum eſt rationem K ad M eandem eſſe rationi N ad P, ſive ut K ad M, ita eſſe N ad P.

A.	B.	C.	D.	K.	L.	M.
E.	F.	G.	H.	N.	O.	P.

Quoniam eſt K ad L, ut (A ad B, hoc eſt ut E ad F, hoc eſt ut) N ad O; ut vero L ad M, ita eſt (C ad D, et ita G ad H, et ita) O ad P. a. 22. 5. erit [a] ex aequali K ad M, ut N ad P. Si igitur rationes &c. Q. E. D.

PROP. H. THEOR.

SI ratio ex quibuſdam rationibus compoſita eadem ſit rationi ex quibuſdam aliis rationibus compoſitae, fueritque una ratio ex prioribus, vel ratio ex quibuſdam ex prioribus compoſita, eadem uni rationi ex poſterioribus, vel rationi ex quibuſdam ex poſterioribus compoſitae; erit reliqua ratio ex prioribus, vel ratio ex reliquis prioribus compoſita, eadem rationi reliquae ex poſterioribus, vel rationi ex reliquis poſterioribus compoſitae.

Sint rationes A ad B, B ad C, C ad D, D ad E, et E ad F; et aliae rationes G ad H, H ad K, K ad L, et L ad M. ſitque ratio A ad F, quae ſc. compo- a. Def. rationis comp. ſita eſt [a] ex prioribus, eadem rationi G ad M, quae compoſita eſt [a] ex poſterioribus. et praeterea ratio A ad D quae compoſita eſt ex rationibus A ad B, B ad C,

A.	B.	C.	D.	E.	F.
G.	H.	K.	L.	M.	

et

et C ad D, eadem ſit rationi G ad K quae compoſita eſt ex rationibus G ad H, et H ad K. erit ratio D ad F quae compoſita eſt ex reliquis rationibus prioribus D ad E, et E ad F, eadem rationi K ad M quae compoſita eſt ex reliquis rationibus poſterioribus K ad L, et L ad M.

Quoniam enim, ex hypotheſi, eſt A ad D, ut G ad K, erit invertendo[b], D ad A, ut K ad G; ut vero A ad F, ita eſt G ad M; ergo[c], b. B. 5.
ex aequali, erit D ad F, ut K ad M. ſi igitur &c. Q. E. D. c. 22. 5.

PROP. K. THEOR.

SI fuerint quotcunque rationes, quae dicantur priores, fuerintque aliae quotcunque rationes, quae dicantur poſteriores; ſitque ratio quae compoſita eſt ex rationibus quae eaedem ſunt rationibus prioribus, ſingulae ſingulis, eadem rationi quae compoſita eſt ex rationibus quae, ſingulae ſingulis, eaedem ſunt rationibus poſterioribus; una vero ratio ex prioribus, vel ratio quae compoſita eſt ex rationibus quae, ſingulae ſingulis, eaedem ſunt totidem ex prioribus, eadem ſit uni rationi ex poſterioribus, vel rationi quae compoſita eſt ex rationibus quae, ſingulae ſingulis, eaedem ſunt totidem ex poſterioribus: erit reliqua ratio ex prioribus, vel, ſi plures fuerint, erit ratio quae compoſita eſt ex rationibus quae eaedem ſunt reliquis ex prioribus, ſingulae ſingulis, eadem rationi reliquae ex poſterioribus, vel, ſi plures fuerint, rationi quae compoſita eſt ex rationibus quae, ſingulae ſingulis, eaedem ſunt reliquis ex poſterioribus.

Sint rationes A ad B, C ad D, E ad F, priores; poſteriores vero ſint rationes G ad H, K ad L, M ad N, O ad P, Q ad R. et ſit ut

A ad B, ita S ad T, et ut C ad D, ita T ad V, ut vero E ad F, ita V ad X. erit igitur, ex Definitione rationis compositae, ratio S ad X composita ex rationibus S ad T, T ad V, V ad X, quae scilicet eaedem sunt, singulae singulis, rationibus A ad B, C ad D, E ad F. sit etiam ut G ad H, ita Y ad Z, et ut K ad L, ita Z ad a, ut M ad N, ita a ad b, ut O ad P, ita b ad c, et ut Q ad R, ita c ad d. est igitur, ex eadem Definitione, ratio Y ad d composita ex rationibus Y ad Z, Z ad a, a ad b, b ad c, et c ad d, quae scilicet eaedem sunt, singulae singulis, rationibus G ad H, K ad L, M ad N, O ad P, et Q ad R. igitur, ex hypothesi, est S ad X, ut Y ad d. praeterea sit ratio A ad B, sive ratio S ad T, una sc. ex prioribus eadem rationi e ad g quae composita est ex rationibus e ad f, et f ad g, quae eaedem sunt, ex hypothesi, rationibus G ad H, et K ad L ex posterioribus; sitque ratio h ad l composita ex rationibus h ad k, et k ad l, quae eaedem sunt rationibus reliquis ex prioribus, ipsis sc. C ad D, et E ad F; et sit ratio m ad p composita ex rationibus m ad n, n ad o, o ad p, quae, singulae singulis, eaedem sunt reliquis ex posterioribus rationibus, ipsis sc. M ad N, O ad P, Q ad R. erit ratio h ad l eadem rationi m ad p, sive erit h ad l, ut m ad p.

h, k, l.
A, B; C, D; E, F. S, T, V, X.
G, H; K, L; M, N; O, P; Q, R. Y, Z, a, b, c, d.
e, f, g. m, n, o, p.

Etenim quoniam est e ad f, ut (G ad H, hoc est ut) Y ad Z; est autem f ad g, ut (K ad L, hoc est ut) Z ad a; erit, ex aequali, e ad g, ut Y ad a. et, ex hypothesi, est A ad B sive S ad T, ut e ad g; quare

quare eſt S ad T, ut Y ad a, et, invertendo, T ad S, ut a ad Y; eſt autem S ad X, ut Y ad d; ergo, ex aequali, erit T ad X, ut a ad d. praeterea quoniam eſt h ad k, ut (C ad D, hoc eſt ut) T ad V; ut vero k ad l, ita (E ad F, hoc eſt ita) V ad X; erit ex aequali h ad l, ut T ad X. ſimiliter oſtendetur eſſe m ad p, ut a ad d. oſtenſum autem fuit eſſe T ad X, ut a ad d. ergo [a] eſt h ad l, ut m ad p. a. 11. 5.
Q. E. D.

Propoſitiones G et K apud veteres et recentiores Geometras comprehendi ſolent in enuntiatione Propoſitionum F et H, brevitatis ſcilicet gratia. quo autem ſenſu hoc fieri poteſt, operae pretium fuit oſtendere; ſaepiſſime enim a Geometris uſurpantur.

EUCLIDIS

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER SEXTUS.

DEFINITIONES.

I.

SIMILES figurae rectilineae ſunt, quae et ſingulos angulos aequales habent, et circa aequales angulos latera proportionalia.



II.

" Reciprocae figurae, triangula ſc. et parallelogramma, ſunt quando circa duos angulos latera ita ſunt proportionalia, ut latus primae ſit ad latus ſecundae, ut reliquum ſecundae latus ad latus reliquum primae."

III.

Extrema ac media ratione ſecari recta linea dicitur, quando ut tota ad majus ſegmentum, ita fuerit majus ſegmentum ad minus.

Altitudo

IV.

Altitudo cujuſque figurae eſt recta linea a vertice ad baſim perpendicularis ducta.

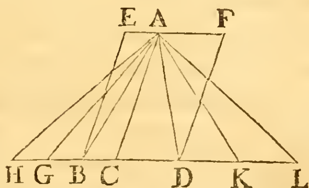


PROP. I. THEOR.

TRIANGULA et parallelogramma quae eandem habent altitudinem, inter ſe ſunt ut baſes.

Sint triangula quidem ABC, ACD, parallelogramma vero EC, CF, quae eandem habent altitudinem, videlicet perpendicularem a puncto A ad BD ductam. Dico ut baſis BC ad CD baſim, ita eſſe triangulum ABC ad triangulum ACD, et parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum.

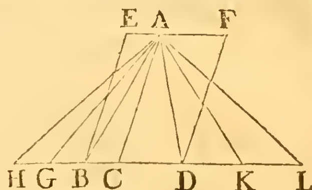
Producatur enim BD ex utraque parte ad puncta H, L, et ipſi quidem baſi BC aequales quotcunque ponantur BG, GH; ipſi vero baſi CD ponantur quotcunque aequales DK, KL; et AG, AH, AK, AL jungantur. Quoniam igitur CB, BG, GH inter ſe aequales ſunt, erunt et triangula AHG, AGB, ABC inter ſe aequalia[a]. ergo quam multiplex eſt baſis HC ipſius BC baſis, tam multiplex eſt AHC triangulum trianguli ABC. eadem ratione quam multiplex eſt LC baſis ipſius baſis CD, tam multiplex eſt et triangulum ALC ipſius ACD trianguli. et ſi aequalis eſt HC baſis baſi CL, et triangulum AHC triangulo ALC erit aequale[a]; et ſi baſis HC baſim CL ſuperat, et triangulum AHC ſuperabit triangulum ALC; et ſi minor, minus erit. quatuor igitur magnitudinibus exiſtentibus, videlicet duabus



a. 38. 1.

bus baſibus BC, CD, et duobus triangulis ABC, ACD, ſumpta ſunt aeque multiplicia utcunque baſis quidem BC, et ABC trianguli, videlicet baſis HC, et AHC triangulum; baſis vero CD et trianguli ACD, alia utcunque multiplicia, nempe CL baſis, et ALC triangulum; atque oſtenſum eſt ſi HC baſis baſim CL ſuperat, et triangulum AHC ſuperare triangulum ALC; et ſi aequalis, aequale; et ſi minor, minus. eſt

b. 5. Def. 5. igitur [b] ut BC baſis ad baſim CD, ita triangulum ABC ad ACD triangulum.



Et quoniam trianguli ABC du-
c. 41. 1. plum eſt [c] parallelogrammum EC, et trianguli ACD parallelogrammum CF duplum[c], partes autem eandem inter
d. 15. 5. ſe rationem habent quam earum aeque multiplices[d]; erit ut ABC triangulum ad triangulum ACD, ita parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum. Quoniam igitur oſtenſum eſt ut baſis BC ad CD baſim, ita eſſe ABC triangulum ad triangulum ACD; ut autem ABC triangulum ad triangulum ACD, ita parallelogrammum EC ad CF pa-
e. 11. 5. rallelogrammum; erit [e] ut BC baſis ad baſim CD, ita parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum. Quare triangula &c. Q. E. D.

Cor. Hinc triangula et parallelogramma, quae aequales habent altitudines, ſunt inter ſe ut baſes.

Poſitis enim figuris ita ut baſes earum ſint in eâdem recta linea, et ductis perpendicularibus a verticibus triangulorum ad baſes, erit recta
f. 33. 1. linea quae vertices jungit parallela rectae in qua ſunt baſes[f], quia perpendiculares ſunt inter ſe aequales et parallelae. et iiſdem conſtructis quae in Propoſitione conſtructa fuerunt, Demonſtratio eadem erit cum ea Propoſitionis.

PROP. II.

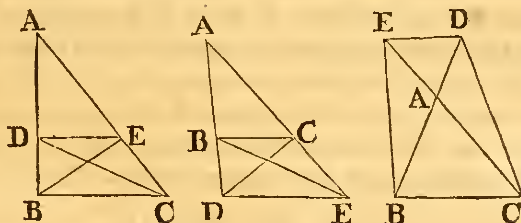
PROP. II. THEOR.

SI uni laterum trianguli parallela quaedam recta linea ducta fuerit, proportionaliter secabit reliqua trianguli latera, vel latera producta. et si latera trianguli, vel latera producta proportionaliter secta fuerint, quae sectiones conjungit recta linea, reliquo trianguli lateri parallela erit.

Trianguli enim ABC uni laterum BC, parallela ducatur DE. Dico ut BD ad DA, ita esse CE ad EA.

Jungantur enim BE, CD; triangulum igitur BDE triangulo CDE est aequale[a], super eadem enim sunt basi DE, et in eisdem parallelis DE, BC. aliud autem triangulum est ADE; aequalia vero ad idem eandem habent rationem[b]; ergo ut triangulum BDE ad triangulum

a. 37. 1.
b. 7. 5.



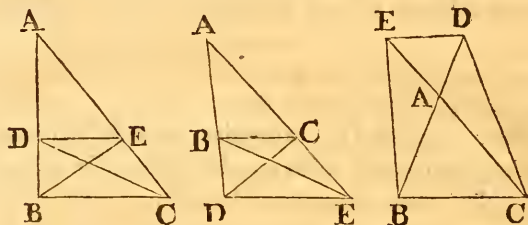
ADE, ita est CDE triangulum ad triangulum ADE; ut autem triangulum BDE ad triangulum ADE, ita est [c] BD ad DA; nam cum eandem altitudinem habent, videlicet perpendicularem a puncto E ad AB ductam, inter se sunt ut bases. et ob eandem causam ut CDE triangulum ad triangulum ADE, ita CE ad EA. ut igitur BD ad DA, ita est CE ad EA[d].

c. 1. 6.
d. 11. 5.

Sed trianguli ABC latera AB, AC, vel latera producta proportionaliter

liter secta sint in punctis D, E, hoc est ut BD ad DA, ita sit CE ad EA, et jungatur DE. Dico DE ipsi BC parallelam esse.

Iisdem enim constructis, quoniam est ut BD ad DA, ita CE ad EA;
c. 1. 6. ut autem BD ad DA, ita est BDE triangulum ad triangulum ADE[c];
et ut CE ad EA, ita CDE triangulum ad triangulum ADE; erit ut



triangulum BDE ad triangulum ADE, ita CDE triangulum ad triangulum ADE. utrumque igitur triangulorum BDE, CDE ad triangulum ADE eandem habet rationem; quare triangulum BDE triangulo
e. 9. 5. CDE est aequale[e]. et sunt super eadem basi DE; aequalia autem tri-
f. 39. 1. angula et super eadem basi constituta etiam in eisdem sunt parallelis[f];
ergo DE ipsi BC parallela est. Si igitur uni &c. Q. E. D.

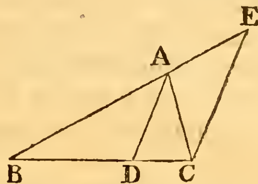
PROP. III. THEOR.

SI trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta linea secet etiam basim; basis segmenta eandem rationem habebunt, quam reliqua trianguli latera. et si basis segmenta eandem rationem habeant, quam reliqua trianguli latera; quae a vertice ad sectionem ducitur recta linea, trianguli angulum bifariam secabit.

Sit

Sit triangulum ABC, et ſecetur angulus BAC bifariam rectâ lineâ AD. Dico ut BD ad DC, ita eſſe BA ad AC.

Ducatur enim per C ipſi DA parallela [a] CE, et producta BA con- a. 31. 1.
veniat cum ipſa in puncto E. Quoniam igitur in parallelas AD, EC incidit recta linea AC, erit ACE angulus angulo alterno CAD aequalis [b]. ſed CAD angulus ponitur aequalis angulo BAD; ergo et BAD b. 29. 1.
ipſi ACE angulo aequalis erit. Rurſus, quoniam in parallelas AD, EC recta linea BAE incidit, exterior angulus BAD aequalis eſt [b] interiori et oppoſito AEC. oſtenſus autem eſt et angulus ACE angulo BAD aequalis; ergo et ACE ipſi AEC aequalis erit; et propterea latus AE



aequale lateri AC [c]. et quoniam uni laterum trianguli BCE, videlicet c. 6. 1.
ipſi EC parallela ducta eſt AD; erit [d] ut BD ad DC, ita BA ad AE. d. 2. 6.
aequalis autem eſt AE ipſi AC; eſt igitur [e] ut BD ad DC, ita BA e. 7. 5.
ad AC.

Sit autem ut BD ad DC, ita BA ad AC, et jungatur AD; dico angulum BAC bifariam ſectam eſſe recta linea AD.

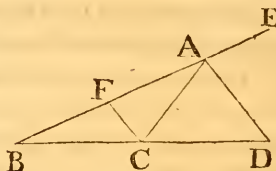
Iiſdem enim conſtructis, quoniam eſt ut BD ad DC, ita BA ad AC; ſed et ut BD ad DC, ita BA ad AE [d], etenim uni laterum trianguli BCE, videlicet ipſi EC, parallela ducta eſt AD, erit [f] et ut BA ad AC, f. 11. 5.
ita BA ad AE. ergo AC eſt aequalis AE [g], et propterea et angulus AEC g. 9. 5.
angulo ACE aequalis [h]. ſed angulus quidem AEC eſt aequalis angulo h. 5. 1.
exteriori BAD [b]; angulus vero ACE aequalis alterno CAD. quare et BAD angulus ipſi CAD aequalis erit. angulus igitur BAC bifariam ſectus eſt recta linea AD. Ergo ſi trianguli &c. Q. E. D.

PROP. A. THEOR.

SI trianguli, uno latere producto, angulus exterior bifariam fecetur, fecans autem angulum recta linea fecet etiam bafim productam; bafis productae fegmenta inter fecantem et bafis terminos eandem rationem habebunt, quam reliqua trianguli latera. et fi bafis productae fegmenta eandem habeant rationem quam reliqua trianguli latera, quae a vertice ad fectionem ducitur recta linea, trianguli angulum exteriorem bifariam fecabit.

Sit triangulum ABC, et recta AD bifariam fecet angulum trianguli exteriorem CAE, et bafi BC productae occurrat in D. erit ut BD ad DC, ita BA ad AC.

a. 31. 1. Ducatur [a] enim per C recta CF parallela ipfi AD. Quoniam igi-
b. 29. 1. tur in parallelas AD, FC incidit recta linea AC, erit [b] ACF angulus angulo alterno CAD aequalis. fed CAD angulus ponitur aequalis angulo DAE; ergo et angulus DAE ipfi ACF angulo aequalis erit. Rurfus quoniam in parallelas AD, FC recta linea FAE incidit, exterior angulus DAE aequalis eft [b] interiori et oppofito CFA. oftenfus autem eft et angulus ACF angulo DAE aequalis; ergo et ACF ipfi CFA aequalis erit, et propterea la-



c. 6. 1. tus AF aequale lateri AC [c]. et quoniam uni laterum trianguli BCF,
d. 2. 6. videlicet ipfi FC, parallela ducta eft AD; erit [d] ut BD ad DC, ita BA ad AF; aequalis autem eft AF ipfi AC; eft igitur ut BD ad DC, ita BA ad AC.

Sit

Sit autem ut BD ad DC, ita BA ad AC, et AD jungatur. erit angulus CAE bifariam ſectus rectâ lineâ AD.

Iiſdem enim conſtructis, quoniam eſt ut BD ad DC, ita BA ad AC; eſt autem [d] ut BD ad DC, ita BA ad AF, etenim uni laterum trianguli BCF, videlicet ipſi FC, parallela ducta eſt AD, erit ut BA ad AC, ita BA ad AF[e]. Ergo AC eſt aequalis AF[f], et propterea angulus AFC angulo ACF aequalis. ſed angulus quidem AFC eſt aequalis angulo exteriori EAD, angulus vero ACF aequalis alterno CAD; quare et EAD angulus ipſi CAD aequalis erit. angulus igitur CAE bifariam ſectus eſt recta linea AD. Ergo ſi &c. Q. E. D.

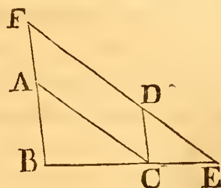
d. 2. 6.
e. 11. 5.
f. 9. 5.

PROP. IV. THEOR.

AEQUIANGULORUM triangulorum latera circum aequales angulos proportionalia ſunt. et homologa ſunt latera quae aequalibus angulis ſubtenduntur.

Sint aequiangula triangula ABC, DCE quae angulum quidem ABC angulo DCE, angulum vero ACB angulo DEC, aequalem habeant, et propterea [a] angulum BAC angulo CDE. Dico triangulorum ABC, DCE proportionalia eſſe latera quae ſunt circa aequales angulos; et homologa latera eſſe quae aequalibus angulis ſubtenduntur.

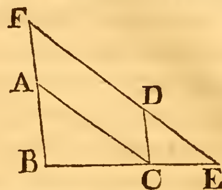
a. 32. 1.



Ponatur [b] enim triangulum DCE ita ut latus ejus CE in directum ſit ipſi BC. et quoniam anguli ABC, ACB duobus rectis minores ſunt[c], aequalis autem eſt angulus ACB angulo DEC; erunt ABC, DEC anguli duobus rectis minores. quare BA, ED productae inter ſe convenient[d]; producantur et conveniant in puncto F. et quoniam angulus DCE eſt aequalis angulo ABC, erit BF ipſi CD parallela[e].

b. 22. 1.
c. 17. 1.
d. Ax. 12. 1.

e. 28. 1. lela [e]. rursus, quoniam aequalis est angulus ACB angulo DEC, parallela erit [e] AC ipsi FE. parallelogrammum igitur est FACD; ac propterea AF quidem ipsi CD, AC vero ipsi
f. 34. 1. FD est aequalis [f]. et quoniam uni laterum trianguli FBE, videlicet ipsi FE, parallela
g. 2. 6. ducta est AC; erit [g] ut BA ad AF, ita BC ad CE. aequalis autem est AF ipsi
h. 7. 5. CD; ut igitur [h] BA ad CD, ita BC ad CE; et permutando ut AB ad BC, ita DC ad CE. rursus, quoniam CD parallela est BF, erit [g] ut BC ad CE, ita FD ad DE. sed FD est aequalis AC; ergo ut BC ad CE, ita AC ad DE. permutando igitur, ut BC ad CA, ita CE ad ED. itaque quoniam ostensum est, ut AB ad BC, ita DC ad CE; ut autem BC ad CA, ita CE ad ED;
i. 22. 5. erit [i] ex aequali, ut BA ad AC, ita CD ad DE aequiangulorum igitur &c. Q. E. D.



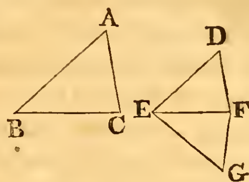
PROP. V. THEOR.

SI duo triangula latera proportionalia habeant, aequiangula erunt triangula, et aequales habebunt angulos quibus homologa latera subtenduntur.

Sint duo triangula ABC, DEF, quae latera proportionalia habeant, hoc est, sit ut AB quidem ad BC, ita DE ad EF; ut autem BC ad CA, ita EF ad FD; et propterea ex aequali ut BA ad AC, ita ED ad DF. Dico triangulum ABC triangulo DEF aequiangulum esse, et aequales habere angulos quibus homologa latera subtenduntur, angulum quidem ABC angulo DEF, angulum vero BCA angulo EFD, et praeterea angulum BAC angulo EDF.

a. 23. 1. Constituatur enim [a] ad rectam lineam EF et ad puncta in ipsa E, F, angulo

angulo quidem ABC aequalis angulus FEG, angulo autem BCA angulus EFG. quare reliquus BAC angulus reliquo EGF eſt aequalis[b]; ideo- b. 32. 1.
que aequiangulum eſt triangulum ABC triangulo EGF. triangulorum igitur ABC, EGF proportionalia ſunt latera quae aequalibus angulis ſubtenduntur[c]. ergo ut AB ad BC, ita c. 4. 6.
GE ad EF; ſed ut AB ad BC, ita DE ad EF; ut igitur DE ad EF, ita GE ad EF[d]. quare utraque ipſarum DE, GE d. 11. 5.
ad EF eandem habet proportionem, et propterea DE ipſi GE eſt aequalis[e]; e. 9. 5.
eadem ratione et DF aequalis eſt FG.



itaque quoniam DE eſt aequalis EG, communis autem EF, duae DE, EF duabus GE, EF ſunt aequales; et baſis DF baſi FG eſt aequalis; angulus igitur DEF eſt aequalis angulo GEF[f], et DEF triangulum f. 8. 1.
aequale triangulo GEF, et reliqui anguli reliquis angulis aequales[g], qui- g. 4. 1.
bus aequalia latera ſubtenduntur. ergo angulus quidem DFE eſt aequalis angulo GFE, angulus vero EDF angulo EGF. et quoniam angulus DEF eſt aequalis angulo GEF, et angulus GEF angulo ABC, erit et angulus ABC angulo DEF aequalis. eadem ratione et angulus ACB aequalis eſt angulo DFE, et adhuc angulus ad A angulo ad D. ergo ABC triangulum triangulo DEF aequiangulum erit. Si igitur duo &c. Q. E. D.

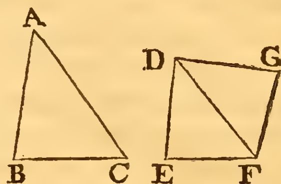
PROP. VI. THEOR.

SI duo triangula unum angulum uni angulo aequalem habeant, circa aequales autem angulos latera proportionalia; aequiangula erunt triangula, et aequales habebunt angulos quibus homologa latera ſubtenduntur.

Sint

Sint duo triangula ABC, DEF, unum angulum BAC uni angulo EDF aequalem habentia, circa aequales autem angulos latera proportionalia, videlicet ut BA ad AC, ita ſit ED ad DF. dico triangulum ABC triangulo DEF aequiangulum eſſe, et angulum quidem ABC habere aequalem angulo DEF, angulum vero ACB angulo DFE.

a. 23. 1. Conſtituatur [a] enim ad rectam lineam DF, et ad puncta in ipſa D, F, alterutri angulorum BAC, EDF, aequalis angulus FDG, angulo autem ACB aequalis DFG. reliquus igitur qui ad B reliquo qui ad G eſt ae-
b. 32. 1. qualis [b]. ergo triangulum ABC triangulo DGF aequiangulum eſt; ac prop-
c. 4. 6. terea ut BA ad AC, ita eſt [c] GD ad DF. ponitur autem et ut BA ad AC, ita ED ad DF; ut igitur ED ad DF,
d. 11. 5. ita GD ad DF [d]; quare ED aequalis eſt ipſi DG [e]; et communis DF;
e. 9. 5. ergo duae ED, DF duabus GD, DF aequales ſunt, et angulus EDF
f. 4. 1. angulo GDF eſt aequalis; baſis igitur EF eſt [f] aequalis baſi FG, triangulumque EDF triangulo GDF, et reliqui anguli reliquis angulis aequales, alter alteri, quibus aequalia latera ſubtenduntur. angulus igitur DFG eſt aequalis angulo DFE; angulus vero ad G angulo ad E. ſed angulus DFG aequalis eſt angulo ACB; angulus igitur ACB angulo DFE eſt aequalis. ponitur autem et BAC angulus aequalis angulo EDF; ergo et reliquus qui ad B aequalis eſt reliquo ad E. aequiangulum igitur eſt triangulum ABC triangulo DEF. Quare ſi duo triangula &c. Q. E. D.



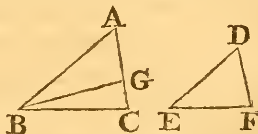
PROP. VII.

PROP. VII. THEOR.

SI duo triangula unum angulum uni angulo aequalem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, et reliquorum utrumque ſimul minorem, vel non minorem recto; vel ſi eorum alter rectus fuerit: aequiangula erunt triangula, et aequales habebunt angulos circa quos latera ſunt proportionalia.

Sint duo triangula ABC, DEF, unum angulum uni angulo aequalem habentia, videlicet angulum BAC angulo EDF aequalem, circa alios autem angulos ABC, DEF latera proportionalia, ut ſit AB ad BC, ſicut DE ad EF; et reliquorum qui ad C, F primò utrumque ſimul minorem recto. Dico triangulum ABC triangulo DEF aequiangulum eſſe, angulumque ABC aequalem angulo DEF, et reliquum videlicet qui ad C reliquo qui ad F aequalem.

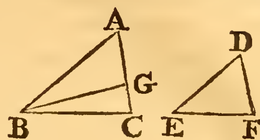
Si enim inaequalis eſt angulus ABC angulo DEF, unus ipſorum major erit; ſit major ABC, et conſtituatur [a] ad rectam lineam AB, et a. 23. 1.
ad punctum in ipſa B, angulo DEF aequalis angulus ABG. et quoniam angulus quidem A eſt aequalis angulo D, angulus vero ABG angulo DEF; erit [b] reliquus AGB reliquo DFE aequalis. b. 32. 1.



aequiangulum igitur eſt ABG triangulum triangulo DEF; quare ut AB ad BG, ſic DE ad EF [c]; ut vero DE ad EF, ſic ponitur AB ad c. 4. 6.
BC; ut igitur [d] AB ad BC, ſic AB ad BG; ideoque AB ad utramque d. 11. 5.
BC, BG eandem habet rationem. erit igitur BC ipſi BG aequalis [e], ac e. 9. 5.
propterea angulus BGC eſt aequalis angulo BCG [f]. minor autem recto f. 5. 1.
ponitur angulus BCG; ergo et BGC minor eſt recto, et ob id qui ei

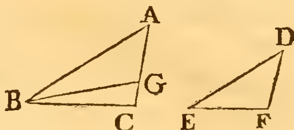
 deinceps

g. 13. 1. deinceps eſt AGB major eſt recto[g]. atque oſtenſus eſt angulus AGB aequalis angulo qui ad F; angulus igitur qui ad F recto major eſt. atqui ponitur minor recto; quod eſt abſurdum. non eſt igitur angulus ABC inaequalis angulo DEF; ergo ipſi eſt aequalis.



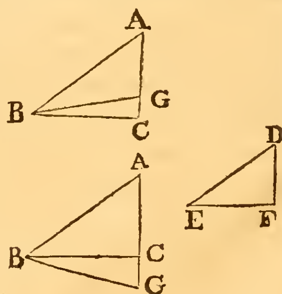
eſt autem angulus qui ad A aequalis ei qui ad D; quare et reliquus qui ad C aequalis eſt reliquo qui ad F. aequiangulum igitur eſt triangulum ABC triangulo DEF.

Sed rurſus ponatur uterque angulorum qui ad C, F, non minor recto. Dico rurſus et ſic triangulum ABC triangulo DEF aequiangulum eſſe.



Iiſdem enim conſtructis, ſimiliter demonſtrabimus BC aequalem ipſi BG, angulumque ad C angulo BGC aequalem. ſed angulus qui ad C non minor eſt recto; non eſt igitur minor recto BGC. quare trianguli BGC duo anguli non ſunt duobus rectis mino-
h. 17. 1. res; quod fieri non poteſt[h]; ac propterea triangulum ABC triangulo DEF aequiangulum eſt, ut in praecedente caſu oſtenſum fuit.

Sit denique alter angulorum ad C, F, puta qui ad C, rectus; erit et in hoc caſu triangulum ABC triangulo DEF aequiangulum.



Si enim non ſit, ad rectam AB, et ad punctum in ea B conſtituatur angulo DEF aequalis angulus ABG; et, ut in primo caſu, oſtendetur recta BG aequalis ipſi BC, et angulus BCG angulo BGC; eſt autem angulus BCG rectus, quare et an-

gulus

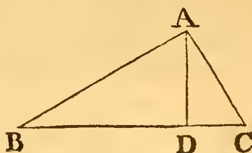
gulus BGC rectus erit[f]. trianguli igitur BGC duo anguli non sunt minores duobus rectis, quod fieri non potest[h]; et propterea triangulum ABC triangulo DEF aequiangulum est. si igitur duo triangula &c. Q. E. D. f. 5. 1. h. 17. 1.

PROP. VIII. THEOR.

SI in triangulo rectangulo, ab angulo recto ad basim perpendicularis ducatur; quae ad perpendicularem sunt triangula, et toti, et inter se sunt similia.

Sit triangulum rectangulum ABC, rectum habens angulum BAC; et a puncto A ad BC perpendicularis ducatur AD. Dico triangula ABD, ADC toti triangulo ABC, et inter se similia esse.

Quoniam enim angulus BAC est aequalis angulo ADB, rectus enim uterque est, et angulus ad B communis duobus triangulis ABC, ABD; erit [a] reliquus ACB reliquo BAD aequalis. aequiangulum igitur est triangulum ABC triangulo ABD; quare latera circa aequales angulos proportionalia habent[b], et propterea inter se similia sunt[c]. eadem ratione demonstrabitur etiam ADC triangulum triangulo ABC simile esse. a. 32. 1. b. 4. 6. c. 1. Def. 6.



Dico insuper triangula ABD, ADC etiam inter se similia esse.

Quoniam enim rectus angulus BDA est aequalis recto ADC, sed et BAD ostensus aequalis angulo ad C; erit [a] reliquus ad B reliquo DAC aequalis. aequiangulum igitur et simile [c] est triangulum ABD triangulo ADC. Quare si in triangulo &c. Q. E. D.

Cor. Ex hoc manifestum est, in triangulo rectangulo perpendicularem ab angulo recto ad basim ductam, mediam proportionalem esse

 inter

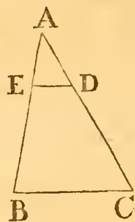
inter ſegmenta baſis: et praeterea inter baſim et baſis ſegmentum utrumlibet, latus ſegmento conterminum medium eſſe proportionale.
b. 4. 6. eſt enim BD ad DA, ut DA ad DC[b], in triangulis aequiangulis BDA, ADC; et BC ad BA, ut BA ad BD[b], in triangulis aequiangulis ABC, DBA; et BC ad CA, ut CA ad CD, in triangulis aequiangulis ABC, DAC.

PROP. IX. PROB.

A Data recta linea imperatam partem abſcindere.

Sit data recta linea AB; oportet ab ipſa AB imperatam partem abſcindere.

Ducatur a puncto A quaedam recta linea AC, quae cum ipſa AB angulum quemlibet contineat; ſumaturque in AC quodvis punctum D, et quam multiplex eſt AB partis abſcindendae, tam multiplex fiat AC ipſius AD; deinde jungatur BC, et per D ipſi BC parallela ducatur DE.



Itaque quoniam uni laterum trianguli ABC, vi-
a. 2. 6. delicet ipſi BC, parallela ducta eſt ED; erit[a] ut CD
b. 18. 5. ad DA, ita BE ad EA; et componendo[b], ut CA ad AD, ita BA ad AE. eſt autem CA multiplex ip-
c. D. 5. ſius AD; ergo BA eadem eſt multiplex ipſius AE[c]. quare quaecunque pars AD eſt ipſius AC, eadem pars erit AE ipſius AB; eſt igitur AE pars a recta AB abſcindenda. a data igitur recta linea AB imperata pars abſciſſa eſt. Quod facere oportebat.

PROP. X. PROB.

DATAM rectam lineam inſectam, datae rectae lineae ſectae ſimiliter ſecare.

Sit

Sit data quidem recta linea inſecta AB, ſecta vero AC; oportet rectam lineam AB inſectam ipſi AC ſectae ſimiliter ſecare.

Sit AC ſecta in punctis D, E, et ponantur ita rectae AB, AC, ut angulum quemvis contineant, jungaturque BC, et per puncta D, E ipſi BC parallelae ducantur [a] DF, EG; per D vero a. 31. 1.
ipſi AB ducatur parallela DHK. parallelogrammum igitur eſt utrumque ipſorum FH, HB; ac propterea DH quidem eſt aequalis [b] b. 34. 1.
FG, HK vero ipſi GB. et quoniam uni laterum trianguli DKC, ipſi ſcilicet KC, parallela ducta eſt HE, erit [c] ut CE ad ED, ita KH ad c. 2. 6.
HD. aequalis autem eſt KH ipſi BG, HD vero ipſi GF; eſt igitur ut CE ad ED, ita BG ad GF. rurſus, quoniam uni laterum trianguli AGE, nimirum ipſi EG, parallela ducta eſt FD, ut ED ad DA, ita erit GF ad FA. ſed oſtenſum eſt ut CE ad ED, ita eſſe BG ad GF; ut igitur CE ad ED, ita eſt BG ad GF, et ut ED ad DA, ita GF ad FA. ergo data recta linea inſecta AB, datae rectae lineae ſectae AC ſimiliter ſecta eſt. Quod facere oportebat.

PROP. XI. PROB.

DUABUS datis rectis lineis tertiam proportionalem invenire.

Sint datae duae rectae lineae AB, AC, et ponantur ita ut angulum quemvis contineant; oportet ipſis AB, AC tertiam proportionalem invenire.

Producantur enim AB, AC ad puncta D, E; ponaturque ipſi AC aequalis BD; et juncta BC, ducatur [a] per D ipſi BC parallela DE. quoniam igi- a. 31. 1.

tur

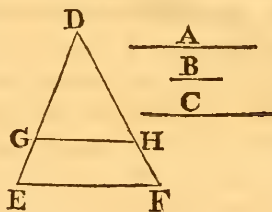
tur uni laterum trianguli ADE, videlicet ipſi DE, parallela ducta eſt
b. 2. 6. BC, erit [b] ut AB ad BD, ita AC ad CE. aequalis autem eſt BD ipſi AC, ut igitur AB ad AC, ita eſt AC ad CE. quare datis duabus rectis lineis AB, AC tertia proportionalis inventa eſt CE. Q. E. F.

PROP. XII. PROB.

TRIBUS datis rectis lineis quartam proportionalem invenire.

Sint datae tres rectae lineae A, B, C; oportet ipſis A, B, C quartam proportionalem invenire.

Exponantur duae rectae lineae DE, DF angulum quemvis EDF continentes; et ponatur ipſi quidem A aequalis DG, ipſi vero B aequalis GE, et ipſi C aequalis DH; junctâque GH,
a. 31. 1. per E ipſi parallela ducatur EF [a]. itaque quoniam uni laterum trianguli DEF, nimirum ipſi EF, parallela ducta eſt GH,
b. 2. 6. erit ut DG ad GE, ita DH ad HF [b]. eſt autem DG ipſi A aequalis, GE vero aequalis B, et DH aequalis C; ut igitur A ad B, ita C ad HF. Quare tribus datis rectis lineis A, B, C quarta proportionalis inventa eſt HF. Q. E. F.



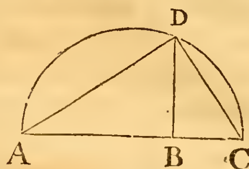
PROP. XIII. PROB.

DUABUS datis rectis lineis, mediam proportionalem invenire.

Sint datae duae rectae lineae AB, BC; oportet inter ipſas AB, BC mediam proportionalem invenire.

Ponantur

Ponantur in directum, et super ipsa AC describatur semicirculus ADC, ducaturque [a] a puncto B ipsi AC ad rectos angulos BD, et AD, DC jungantur. Quoniam igitur angulus ADC in semicirculo rectus est [b], et quoniam in triangulo rectangulo ADC, ab angulo recto ad basim perpendicularis ducta est DB, erit DB media proportionalis inter segmenta basis AB, BC [c]. duabus igitur datis rectis lineis AB, BC media inter ipsas proportionalis inventa est DB. Q. E. F.



a. 11. 1.

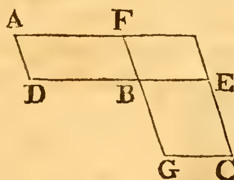
b. 31. 3.

c. Cor. 8. 6.

PROP. XIV. THEOR.

Parallelogrammorum aequalium, et unum uni aequalem habentium angulum, latera, quae circum aequales angulos, reciproce sunt proportionalia: et quorum parallelogrammorum unum uni aequalem habentium angulum, latera, quae circum aequales angulos, sunt reciproce proportionalia; ea inter se sunt aequalia.

Sint aequalia parallelogramma AB, BC, aequales habentia angulos ad B, et ponantur in directum DB, BE; ergo et in directum erunt FB, BG [a]. Dico parallelogrammorum AB, BC latera quae sunt circa aequales angulos esse reciproce proportionalia; hoc est ut DB ad BE, ita esse GB ad BF.



a. 14. 1.

Compleatur enim parallelogrammum FE; et quoniam parallelogrammum AB aequale est parallelogrammo BC, aliud autem est FE parallelogrammum, erit ut AB ad FE, ita BC ad FE [b]. sed ut AB quidem ad FE, ita est DB ad BE [c]; ut autem BC ad FE, ita GB ad BF [c];

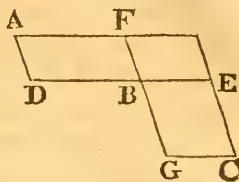
b. 7. 5.

c. 1. 6.

ut

d. 11. 5. ut igitur DB ad BE, ita GB ad BF [d]. ergo parallelogrammorum AB, BC latera, quae circum aequales angulos, ſunt reciproce proportionalia.

Sint autem latera, quae circum aequales angulos, reciproce proportionalia, ſit nempe ut DB ad BE, ita GB ad BF; dico parallelogrammum AB parallelogrammo BC aequale eſſe.



Quoniam enim eſt ut DB ad BE, ita GB ad BF; ut autem DB ad BE, ita AB parallelogrammum ad parallelogrammum
c. 1. 6. FE [c]; et ut GB ad BF, ita BC parallelogrammum ad parallelogram-
e. 9. 5. mum FE [c]; erit [d] et ut AB ad FE, ita BC ad FE. aequale igitur [e] eſt AB parallelogrammum parallelogrammo BC. Ergo parallelogrammorum &c. Q. E. D.

PROP. XV. THEOR.

TRIANGULORUM aequalium, et unum uni aequalem habentium angulum, latera, quae circum aequales angulos, ſunt reciproce proportionalia: et quorum triangulorum unum uni aequalem habentium angulum latera, quae circum aequales angulos, ſunt reciproce proportionalia, ea inter ſe ſunt aequalia.

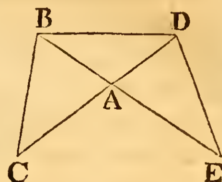
Sint aequalia triangula ABC, ADE unum angulum uni angulo aequalem habentia, angulum ſcilicet BAC angulo DAE; dico triangulorum BAC, DAE latera quae circum aequales angulos eſſe reciproce proportionalia, hoc eſt ut CA ad AD, ita eſſe EA ad AB.

Ponantur enim ita ut in directum ſit CA ipſi AD; ergo et EA
a. 14. 1. ipſi AB in directum erit [a]; et jungatur BD. Quoniam igitur triangulum

ABC

ABC aequale eſt triangulo ADE, aliud autem eſt ABD; erit ut CAB triangulum ad triangulum BAD, ita [b] triangulum EAD ad triangulum DAB. ſed ut triangulum quidem CAB ad BAD triangulum, ita CA ad AD[c]; ut autem triangulum EAD ad ipſum DAB, ita EA ad AB[c]; ut igitur [d] CA ad AD, ita EA ad AB. quare triangulorum ABC, ADE latera, quae circum aequales angulos reciproce ſunt proportionalia.

b. 7. 5.
c. 1. 6.
d. 11. 5.



Sint autem latera triangulorum ABC, ADE circum aequales angulos reciproce proportionalia, ſcilicet ſit ut CA ad AD, ita EA ad AB; dico triangulum ABC triangulo ADE aequale eſſe. junctâ enim rurſus BD, quoniam ut CA ad AD, ita eſt EA ad AB, ut autem CA ad AD, ita eſt BAC triangulum ad triangulum BAD[c]; et ut EA ad AB, ita triangulum EAD ad triangulum BAD[c]; erit [d] ut triangulum BAC ad triangulum BAD, ita triangulum EAD ad BAD triangulum. aequale igitur [e] eſt triangulum ABC triangulo ADE. Aequalium igitur &c. Q. E. D.

e. 9. 5.

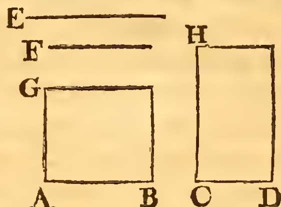
PROP. XVI. THEOR.

SI quatuor rectae lineae proportionales fuerint, rectangulum ab extremis contentum aequale eſt ei rectangulo quod a mediis continetur: et ſi rectangulum ab extremis contentum aequale fuerit ei quod a mediis continetur, quatuor rectae lineae proportionales erunt.

Sint quatuor rectae lineae proportionales AB, CD, E, F, ſit ſcilicet ut AB ad CD, ita E ad F; dico rectangulum contentum a rectis lineis AB, F aequale eſſe ei quod ipſis CD, E continetur.

Ducantur

a. 11. 1. Ducantur [a] enim a punctis A, C ipsis AB, CD ad rectos angulos AG, CH; ponaturque ipsi quidem F aequalis AG, ipsi vero E aequalis CH, et compleantur BG, DH parallelogramma. Quoniam igitur est ut AB ad CD, ita E ad F; est autem E aequalis CH, et F ipsi
b. 7. 5. AG; erit [b] ut AB ad CD, ita CH ad AG. parallelogrammorum igitur BG, DH latera, quae sunt circum aequales angulos, reciproce proportionalia sunt; quorum autem aequiangulorum parallelogrammorum latera, quae sunt circum aequales angulos, reciproce sunt
c. 14. 6. proportionalia, ea inter se sunt aequalia [c]; ergo parallelogrammum BG aequale est parallelogrammo DH. atque est parallelogrammum quidem BG, quod rectis lineis AB, F continetur, etenim AG est aequalis F; parallelogrammum vero DH, quod continetur ipsis CD, E, est enim CH ipsi E aequalis. rectangulum igitur contentum rectis AB, F est aequale ei quod ipsis CD, E continetur.



Sed sit rectangulum contentum rectis AB, F aequale ei quod ipsis CD, E continetur; dico quatuor rectas lineas proportionales esse, videlicet ut AB ad CD, ita E ad F.

Iisdem enim constructis, quoniam rectangulum contentum rectis AB, F est aequale ei quod CD, E continetur, atque est rectangulum BG contentum quidem rectis AB, F, etenim AG est aequalis F; contentum vero ipsis CD, E est rectangulum DH, est enim CH ipsi E aequalis; erit parallelogrammum BG aequale parallelogrammo DH; et sunt aequiangula. aequalium autem et aequiangulorum parallelogrammorum latera, quae circum aequales angulos, sunt reciproce proportionalia [c]. quare ut AB ad CD, ita CH ad AG; aequalis autem est CH

ipsi

ipsi E, et AG ipsi F. ut igitur AB ad CD, ita E ad F. ergo si quatuor rectae &c. Q. E. D.

PROP. XVII. THEOR.

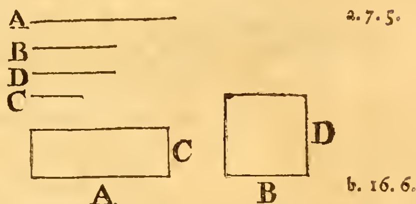
SI tres rectae lineae proportionales fuerint, rectangulum ab extremis contentum aequale est ei quod a media fit quadrato: et si rectangulum ab extremis contentum aequale fuerit ei quod a media fit quadrato, tres rectae lineae proportionales erunt.

Sint tres rectae lineae proportionales A, B, C; sit scilicet ut A ad B, ita B ad C; dico rectangulum contentum rectis A, C aequale esse ei quod à media B fit quadrato.

Ponatur ipsi B aequalis D; et quoniam ut A ad B, ita B ad C, aequalis autem est B ipsi D; erit [a] ut A ad B, ita D ad C. si autem quatuor rectae lineae proportionales fuerint, rectangulum ab extremis contentum est aequale ei quod à mediis continetur [b]. Ergo rectangulum rectis A, C contentum est aequale ei quod continetur ipsis B, D. sed rectangulum contentum rectis B, D est aequale quadrato quod fit ex ipsa B; etenim B est aequalis D. rectangulum igitur contentum rectis A, C est aequale ei quod ex B fit quadrato.

a. 7. 5.

b. 16. 6.



Sed sit rectangulum contentum rectis A, C aequale ei quod ex B fit quadrato; dico ut A ad B, ita esse B ad C.

Iisdem enim constructis, quoniam rectangulum contentum A, C aequale est quadrato quod fit ex B, at quadratum quod fit ex B est rec-

 tangulum

tangulum quod ipsis B, D continetur, est enim B aequalis ipsi D; erit rectangulum contentum A, C aequale ei quod ipsis B, D continetur. si autem rectangulum ab extremis contentum aequale fuerit ei quod à me-
b. 16. 6. diis continetur, quatuor rectae lineae proportionales erunt[b]. est igitur ut A ad B, ita D ad C; aequalis autem est B ipsi D; ergo ut A ad B, ita B ad C. Si igitur tres rectae lineae &c. Q. E. D.

PROP. XVIII. PROB.

A Data recta linea dato rectilineo simile, et similiter positum rectilineum describere.

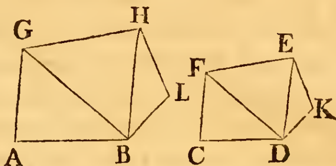
Sit data recta linea AB, datum autem rectilineum CDEF quadrilaterum; oportet à recta linea AB rectilineo CDEF simile, et similiter positum rectilineum describere.

Jungatur DF, et ad rectam lineam AB, et ad puncta in ipsa A,
a. 23. 1. B angulo quidem ad C aequalis angulus constituatur [a] BAG, angulo autem CDF angulus ABG; reliquus igitur CFD angulus reliquo AGB
b. 32. 1. est aequalis[b]. ergo aequiangulum est FCD triangulum triangulo GAB. rursus, constituatur [a] ad rectam lineam BG, et ad puncta in ipsa G, B, angulo quidem DFE aequalis angulus BGH, angulo autem FDE aequalis GBH; ergo reliquus FED reliquo GHB est aequalis. aequiangulum igitur est triangulum FDE triangulo GBH. Quoniam igitur angulus AGB aequalis est angulo CFD, et angulus BGH ipsi DFE, erit totus AGH angulus toti CFE aequalis. eadem ratione et ABH est aequalis ipsi CDE; et praeterea angulus quidem ad A angulo ad C aequalis, angulus vero GHB angulo FED. aequiangulum igitur est rectilineum ABHG rectilineo CDEF. sed et latera circa aequales angulos proportionalia habent. Quoniam enim triangula GAB, FCD sunt ae-
c. 4. 6. quiangula, erit BA ad AG, ut DC ad CF[c]; et quoniam est AG ad GB,

GB, ut CF ad FD; ut vero GB ad GH, ita, propter aequiangula triangula BGH, DFE, eſt FD ad FE; erit ex aequali [d] AG ad GH, ut CF ad FE. ſimiliter oſtendetur AB ad BH, ut CD ad DE. et eſt GH ad HB, ut FE ad ED[c]. quoniam igitur aequiangula ſunt rectilinea, ABHG, CDEF, et latera circum aequales angulos proportionalia habent, erunt inter ſe ſimilia[e].

d. 22. 5.
c. 4. 6.
e. 1. Def. 6.

Deſcribendum jam ſit à data recta linea AB quinquelaterum ſimile, et ſimiliter poſitum quinquelatero dato CDKEF.



Jungatur DE, et à data recta linea AB deſcribatur quadrilaterum ABHG ſimile, et ſimiliter poſitum ipſi CDEF, et ad rectam lineam BH, et ad puncta in ipſa data B, H, angulo quidem EDK aequalis angulus conſtituatur HBL, angulo autem DEK aequalis angulus BHL. reliquus igitur ad K reliquo ad L eſt aequalis. Quoniam vero ſimilia ſunt quadrilatera ABHG, CDEF, erit angulus GHB aequalis angulo FED, et eſt BHL angulus aequalis angulo DEK; totus igitur GHL angulus toti FEK eſt aequalis. eadem ratione et ABL angulus aequalis eſt ipſi CDK. aequiangula propterea ſunt quinquelatera AGHLB, CFEKD. et quoniam ſimilia ſunt quadrilatera AGHB, CFED, erit GH ad HB, ut FE ad ED; ut vero HB ad HL, ita ED ad EK[c]; ergo ex aequali [d] eſt GH ad HL, ut FE ad EK. eadem ratione eſt AB ad BL, ut CD ad DK. et eſt BL ad LH, ut DK ad KE, quia aequiangula ſunt triangula BLH, DKE. Quoniam igitur quinquelatera AGHLB, CFEKD ſunt aequiangula, et latera circum aequales angulos proportionalia habent, erunt inter ſe ſimilia[e]. eademque ratione rectilineum a data recta linea deſcribi poteſt ſimile, et ſimiliter poſitum dato Hexagono et ita deinceps. Q. E. F.

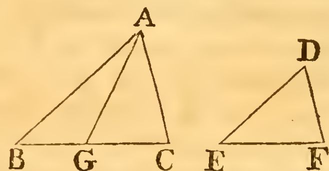
PROP. XIX.

PROP. XIX. THEOR.

SIMILIA triangula inter ſe ſunt in duplicata ratione laterum homologorum.

Sint ſimilia triangula ABC, DEF habentia angulum ad B aequalem angulo ad E, et ſit ut AB ad BC, ita DE ad EF, ita ut latus BC homologum ſit lateri EF. Dico ABC triangulum ad triangulum DEF duplicatam rationem habere ejus quam habet BC ad EF.

a. 11. 6. Sumatur enim ipſis BC, EF tertia proportionalis [a] BG, ut ſit ſicut
BC ad EF, ita EF ad BG, et jungatur GA. Quoniam igitur ut AB
ad BC, ita eſt DE ad EF, erit per-
b. 16. 5. mutando [b] ut AB ad DE, ita BC
ad EF. ſed ut BC ad EF, ita EF
ad BG; ut igitur AB ad DE, ita
c. 11. 5. EF ad BG [c]. quare triangulorum
ABG, DEF latera, quae circum ae-
quales angulos, reciproce ſunt proportionalia. quorum autem triangulorum unum angulum uni aequalem habentium latera, quae circum aequales angulos, ſunt reciproce proportionalia, ea inter ſe ſunt aequalia.
d. 15. 6. aequale igitur [d] eſt ABG triangulum triangulo DEF. et quoniam eſt
ut BC ad EF, ita EF ad BG; ſi autem tres rectae lineae proportio-
e. 10. Def. 5. nales ſint, prima ad tertiam duplicatam rationem habere dicitur [e] ejus
quam habet ad ſecundam; habebit igitur BC ad BG duplicatam rationem ejus quam habet BC ad EF. ut autem BC ad BG, ita ABC tri-
f. 1. 6. angulum ad triangulum ABG [f]. ergo et ABC triangulum ad triangulum
ABG duplicatam rationem habet ejus quam BC habet ad EF. eſt autem
g. 7. 5. ABG triangulum triangulo DEF aequale; et triangulum igitur [g] ABC
ad



ad triangulum DEF, duplicatam habebit rationem ejus quam habet BC ad EF. Quare ſimilia triangula &c. Q. E. D.

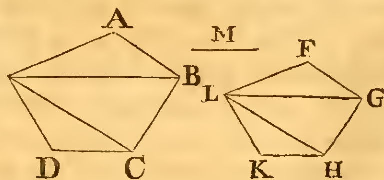
Cor. Ex hoc manifeſtum eſt, ſi tres rectae lineae proportionales fuerint, ut prima ad tertiam, ita eſſe triangulum quod fit à prima ad triangulum quod à ſecunda ſimile, et ſimiliter deſcriptum. Quoniam oſtenſum eſt ut CB ad BG, ita ABC triangulum ad triangulum DEF.

PROP. XX. THEOR.

Similia polygona in ſimilia triangula dividuntur, et numero aequalia, et homologa totis; et polygonum ad polygonum duplicatam rationem habet ejus quam latus homologum habet ad homologum latus.

Sint ſimilia polygona ABCDE, FGHKL, et ſit AB latus homologum ipſi FG. Dico polygona ABCDE, FGHKL in ſimilia triangula dividi, et numero aequalia et homologa totis; et polygonum ABCDE ad polygonum FGHKL duplicatam rationem habere ejus quam habet AB ad FG.

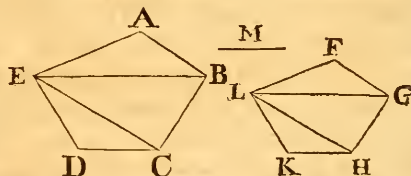
Jungantur BE, EC, GL, LH. et quoniam ſimile eſt ABCDE polygonum polygono FGHKL, angulus BAE angulo GFL eſt aequalis[a], atque eſt ut BA ad AE, ita GF ad FL[a]. quoniam igitur duo triangula ſunt ABE, FGL unum angulum uni angulo aequalem habentia, circum aequales autem angulos latera proportionalia; erit triangulum ABE triangulo FGL aequiangulum[b]; ergo et ſimile[c]. angulus igitur ABE aequalis eſt angulo FGL. eſt autem et totus ABC angulus aequalis toti FGH[a], propter ſimilitudinem



a. 1. Def. 6.
b. 6. 6.
c. 4. 6.

ſimilitudinem polygonorum. ergo reliquus EBC reliquo LGH eſt aequa-
a. 1. Def. 6. lis. et quoniam ob ſimilitudinem triangulorum ABE, FGL, eſt [a] ut EB ad BA, ita LG ad GF; ſed et propter ſimilitudinem polygonorum eſt [a] ut AB ad BC, ita FG ad GH; erit ex aequali ut EB ad BC,
d. 22. 5. ita LG ad GH [d]; hoc eſt circum aequales angulos EBC, LGH latera
b. 6. 6. ſunt proportionalia; aequiangulum igitur [b] eſt EBC triangulum trian-
c. 4. 6. gulo LGH; quare et ſimile [c]. eadem ratione et ECD triangulum ſimile eſt triangulo LHK. ſimilia igitur polygona ABCDE, FGHKL in ſimilia triangula dividuntur, et numero aequalia.

Dico et homologa totis, hoc eſt ut proportionalia ſint triangula ſibi invicem et totis polygonis; et antecedentia quidem eſſe ABE, EBC, ECD, conſequentia autem ipſorum FGL, LGH, LHK; et ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL duplicatam rationem habere ejus quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc eſt AB ad FG.



Quoniam enim ſimile eſt ABE triangulum triangulo FGL, habebit ABE triangulum ad triangulum FGL duplicatam rationem ejus quam habet BE
e. 19. 6. ad GL [e]. eadem ratione, et triangulum BEC ad GLH triangulum duplicatam rationem habet ejus quam BE ad GL [e]. eſt igitur ut ABE triangulum ad triangulum FGL, ita triangulum BEC ad GLH trian-
f. 11. 5. gulum [f]. rurſus, quoniam ſimile eſt triangulum EBC triangulo LGH, habebit EBC triangulum ad triangulum LGH duplicatam rationem ejus quam recta linea CE habet ad rectam HL [e]. eadem ratione et ECD triangulum ad triangulum LHK duplicatam rationem habet ejus quam CE ad HL. eſt igitur ut triangulum EBC ad triangulum LGH, ita ECD triangulum ad triangulum LHK. oſtenſum autem eſt et ut EBC

triangulum

triangulum ad triangulum LGH, ita triangulum ABE ad triangulum FGL. Ergo ut triangulum ABE ad triangulum FGL, ita triangulum EBC ad LGH triangulum, et triangulum ECD ad ipſum LHK. et igitur ut unum antecedentium ad unum conſequentium, ita omnia antecedentia ad omnia conſequentia[g]. Ergo ut triangulum ABE ad triangulum FGL, ita ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL; ſed ABE triangulum ad triangulum FGL duplicatam rationem habet ejus quam latus homologum AB habet ad homologum latus FG[e]. Ergo et ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL duplicatam rationem habet ejus quam AB latus homologum habet ad FG homologum latus. Similia igitur polygona &c. Q. E. D.

g. 12. 5.
e. 19. 6.

Cor. 1. Eodem modo et in ſimilibus quadrilateris et multilateris quibuſcunque oſtendetur ea eſſe in duplicata ratione laterum homologorum. oſtenſum autem eſt in triangulis[e]. Quare universè ſimiles figurae rectilineae ſunt in duplicata ratione laterum homologorum.

Cor. 2. Et ſi ipſis AB, FG tertiam proportionalem ſumamus quae ſit M, habebit AB ad M duplicatam rationem ejus quam habet AB ad FG[h]. habet autem et polygonum ſuper AB ad polygonum ſuper FG, et quadrilaterum ad quadrilaterum duplicatam rationem ejus quam habet latus homologum ad homologum latus, hoc eſt quam AB ad FG. Ergo ut AB ad M, ita eſt figura ſuper AB ad eam ſuper FG. atque oſtenſum eſt hoc in triangulis[i]. Universè igitur manifeſtum eſt, ſi tres rectae lineae proportionales fuerint, ut prima ad tertiam, ita eſſe figuram rectilineam quae fit a prima ad eam quae a ſecunda, ſimilem et ſimiliter deſcriptam.

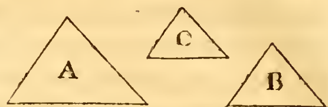
h. 10. Def. 5.
i. Cor. 19. 6.

PROP. XXI. THEOR.

QUAE eidem rectilineo ſunt ſimilia, et inter ſe ſimilia ſunt.

Sit enim utrumque rectilineorum A, B simile rectilineo C; dico et rectilineum A rectilineo B simile esse.

Quoniam enim simile est A rectilineum rectilineo C, et ipsi aequiangulum erit, et circum aequales an-
a. 1. Def. 6. gulos latera habebit proportionalia [a]. rursus, quoniam simile est rectilineum B rectilineo C, aequiangulum



ipsi erit, et circa aequales angulos latera proportionalia habebit [a]. utrumque igitur rectilineorum A, B ipsi C aequiangulum est, et circum aequales angulos latera habet proportionalia. quare et rectilineum A
b. 1. Ax. 1. ipsi B est aequiangulum [b], lateraque circum aequales angulos proportio-
c. 11. 5. nalia habet [c]; ac propterea A ipsi B est simile [a]. Q. E. D.

PROP. XXII. THEOR.

SI quatuor rectae lineae proportionales fuerint, et rectilinea quae ab ipsis fiunt similia, et similiter descripta, proportionalia erunt. et si rectilinea quae ab ipsis fiunt similia, et similiter descripta, proportionalia fuerint, et ipsae rectae lineae proportionales erunt.

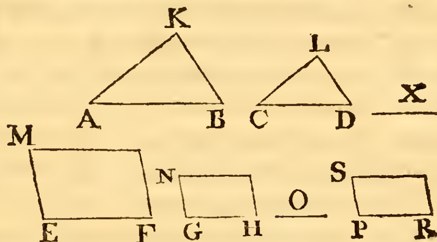
Sint quatuor rectae lineae proportionales AB, CD, EF, GH, sit scilicet ut AB ad CD, ita EF ad GH, et descripta sint ab ipsis quidem AB, CD similia, et similiter posita rectilinea KAB, LCD; ab ipsis vero EF, GH describantur rectilinea similia, et similiter posita MF, NH. Dico ut KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita esse rectilineum MF ad ipsum NH rectilineum.

a. 11. 6. Sumatur enim ipsis quidem AB, CD tertia proportionalis X [a]; ipsis vero EF, GH, tertia proportionalis O. et quoniam est ut AB ad CD,
b. 11. 5.
c. 22. 5. ita EF ad GH, erit ut CD ad X, ita GH ad O [b]; quare ex aequali [c]

ut

ut AB ad X, ita EF ad O. ſed ut AB quidem ad X, ita eſt rectilineum KAB ad LCD rectilineum [d], ut autem EF ad O, ita rectilineum MF ad rectilineum NH [d]. ut igitur KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita eſt rectilineum MF ad NH rectilineum [b]. d. 2. Cor. 20. 6. b. 11. 5.

Sed ſit ut KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita rectilineum MF ad rectilineum NH; dico ut AB ad CD, ita eſſe EF ad GH. fiat enim ut AB ad CD, ita EF ad PR [e], et deſcribatur [f] ab ipſa PR alterutri rectilineorum MF, NH ſimile, et ſimiliter poſitum rectilineum SR. quoniam igitur eſt ut AB ad CD, ita EF ad PR, et deſcripta ſunt ab ipſis quidem AB, CD ſimilia, et ſimiliter poſita rectilinea KAB, LCD, e. 12. 6. f. 18. 6.



ab ipſis vero EF, PR ſimilia, et ſimiliter poſita rectilinea MF, SR, erit, ex prius demonſtratis, ut KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita rectilineum MF ad rectilineum SR; ponitur autem et ut rectilineum KAB ad rectilineum LCD, ita MF rectilineum ad rectilineum NH. rectilineum igitur MF ad utrumque ipſorum NH, SR eandem habet rationem; ergo rectilineum NH eſt ipſi SR aequale [g]. eſt autem ipſi ſimile et ſimiliter poſitum; ergo GH eſt aequalis PR. et quoniam ut AB ad CD, ita EF ad PR; aequalis autem PR ipſi GH; erit ut AB ad CD, ita EF ad GH. Si igitur quatuor rectae lineae &c. Q. E. D. g. 9. 5.

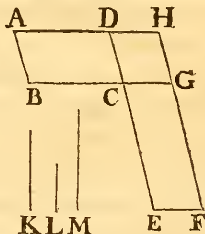
 PROP. XXIII.

PROP. XXIII. THEOR.

AEQUIANGULA parallelogramma inter ſe rationem habent ex laterum rationibus compoſitam.

Sint aequiangula parallelogramma AC, CF aequalem habentia angulum BCD angulo ECG. Dico parallelogrammum AC ad parallelogrammum CF rationem habere compoſitam ex laterum rationibus.

Ponantur enim ut BC ſit in directum ipſi CG; ergo et DC ipſi
a. 14. 1. CE in directum erit[a]; et compleatur DG parallelogrammum; expo-
b. 12. 6. naturque recta linea quaedam K, et fiat [b] ut BC ad CG, ita K ad L; ut autem DC ad CE, ita L ad M. rationes igitur ipſius K ad L, et L ad M eaedem ſunt rationibus laterum videlicet BC ad CG, et DC ad CE. ſed ratio K ad M com-
c. A. Def. 5. poſita dicitur [c] ex ratione K ad L, et ratione L ad M. quare et K ad M rationem habet ex laterum rationibus compoſitam. et quoniam eſt ut BC ad CG, ita AC parallelogram-
d. 1. 6. mum ad parallelogrammum CH[d]; ſed et ut BC ad CG, ita K ad L;
e. 11. 5. erit [e] ut K ad L, ita parallelogrammum AC ad CH parallelogrammum. rurſus, quoniam eſt ut DC ad CE, ita CH parallelogrammum ad parallelogrammum CF; ut autem DC ad CE, ita L ad M; erit ut L ad M, ita parallelogrammum CH ad CF parallelogrammum. itaque cum oſtenſum ſit ut K quidem ad L, ita AC parallelogrammum ad parallelogrammum CH; ut autem L ad M, ita parallelogrammum CH
f. 22. 5. ad CF parallelogrammum; erit ex aequali [f] ut K ad M, ita AC parallelogrammum ad ipſum CF. habet autem K ad M rationem ex laterum rationibus compoſitam. Ergo et AC parallelogrammum ad parallelogrammum



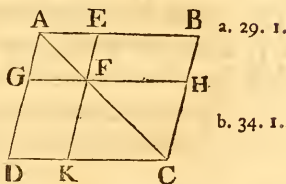
rallelogrammum CF rationem habet ex laterum rationibus compositam. Aequiangula igitur parallelogramma &c. Q. E. D.

PROP. XXIV. THEOR.

OMNIS parallelogrammi, quae circa diametrum sunt parallelogramma, et toti, et inter se sunt similia.

Sit parallelogrammum ABCD, cujus diameter AC; circa diametrum vero AC parallelogramma sint EG, HK. Dico parallelogramma EG, HK et toti ABCD, et inter se similia esse.

Quoniam enim parallelae sunt DC, GF, erit angulus ADC angulo AGF aequalis[a]. eadem ratione quoniam parallelae sunt BC, EF, aequalis erit angulus ABC ipsi AEF. uterque vero angulus BCD, EFG opposito DAB est aequalis[b], quare et inter se aequales erunt. parallelogramma igitur ABCD, AEFG inter se sunt aequiangula. et quoniam angulus ABC aequalis est angulo AEF, communis vero BAC, erunt triangula BAC, EAF inter se aequiangula; ut igitur AB ad BC, ita[c] est AE ad EF. et quoniam latera parallelogrammorum opposita sunt inter se aequalia[b], erit [d] et AB ad AD, ut AE ad AG; et DC ad CB, ut GF ad FE; et praeterea CD ad DA, ut FG ad GA. Ergo parallelogrammorum ABCD, AEFG latera, quae circum aequales angulos, sunt proportionalia; ac propterea ABCD parallelogrammum ipsi AEFG est simile[e]. eadem ratione parallelogrammum ABCD simile est ipsi FHCK. utrumque igitur ipsorum GE, KH parallelogrammorum ipsi DB est simile. quae autem eidem rectilineo sunt similia, et inter se similia sunt[f]; parallelogrammum igitur GE simile est ipsi KH. Quare omnis &c. Q. E. D.



a. 29. 1.
b. 34. 1.
c. 4. 6.
d. 7. 5.
e. 1. Def. 6.
f. 21. 6.

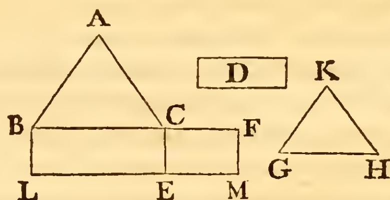
PROP. XXV.

PROP. XXV. PROB.

DATO rectilineo, ſimile, et alteri dato aequale idem conſtituere.

Sit datum quidem rectilineum cui oportet ſimile conſtituere ABC, cui autem aequale ſit D. oportet ipſi ABC ſimile, et ipſi D aequale idem conſtituere.

a. Cor. 45. 1. Applicetur [a] enim ad rectam quidem lineam BC rectilineo ABC aequale parallelogrammum BE; ad rectam vero CE applicetur [a] parallelogrammum CM aequale ipſi D, in angulo FCE qui CBL angulo eſt ae-
b. {29. 1. 14. 1.} qualis. in directum igitur eſt BC ipſi CF [b], et LE ipſi EM. ſumatur-
c. 13. 6. que inter BC, CF media proportionalis GH [c], et ab ipſa GH deſcriba-
d. 18. 6. tur [d] rectilineum KGH ſimile et ſimiliter poſitum rectilineo ABC. et quoniam eſt ut BC ad GH, ita GH ad CF, ſi autem tres rectae pro-



portionales ſint, ut prima ad tertiam, ita eſt figura quae ſit a prima, ad
e. 2. Cor. 20. 6. eam quae a ſecunda ſimilem, et ſimiliter deſcriptam [e]; erit ut BC ad CF, ita ABC rectilineum ad rectilineum KGH. ſed et ut BC ad CF,
f. 1. 6. ita parallelogrammum BE ad EF parallelogrammum [f]; ut igitur rectili-
g. 11. 5. neum ABC ad rectilineum KGH, ita [g] BE parallelogrammum ad parallelogrammum EF. eſt autem rectilineum ABC aequale parallelogrammo
h. 14. 5. BE; aequale igitur eſt [h] et KGH rectilineum parallelogrammo EF.

ſed

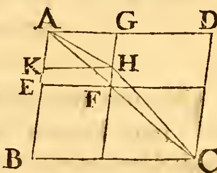
ſed EF parallelogrammum aequale eſt rectilineo D. ergo et rectilineum KGH ipſi D eſt aequale; eſt autem KGH ſimile rectilineo ABC. Dato igitur rectilineo ABC ſimile, et alteri dato D aequale idem conſtitutum eſt KGH. Q. E. F.

PROP. XXVI. THEOR.

SI a parallelogrammo parallelogrammum auferatur ſimile toti, et ſimiliter poſitum, communem ipſi angulum habens; circa eandem diametrum eſt cum toto.

A parallelogrammo enim ABCD parallelogrammum AEFG auferatur, ſimile ipſi ABCD, ſimiliterque poſitum, communemque ipſi angulum habens DAB. Dico parallelogrammum ABCD circa eandem eſſe diametrum cum parallelogrammo AEFG.

Non enim, ſed ſi fieri poteſt, ſit parallelogrammi BD diameter AHC, et occurrat GF ipſi AHC in H; ducaturque per H alterutri ipſarum AD, BC parallela HK. Quoniam igitur circa eandem diametrum eſt ABCD parallelogrammum cum parallelogrammo AKHG, erit parallelogrammum ABCD parallelogrammo AKHG ſimile[a]. ergo ut DA ad AB, ita GA ad AK[b]. eſt autem et propter ſimilitudinem parallelogrammorum ABCD, AEFG, ut DA ad AB, ita GA ad AE. et igitur ut GA ad AE, ita GA ad AK[c]. quare GA ad utramque ipſarum AE, AK eandem rationem habet; erit igitur AE ipſi AK aequalis[d], major minori, quod fieri non poteſt. non igitur circa eandem diametrum eſt ABCD parallelogrammum cum parallelogrammo AKHG. quare circa eandem diametrum eſt cum ipſo AEFG. Si igitur a parallelogrammo &c. Q. E. D.



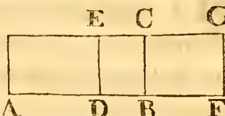
a. 24. 6.
b. 1. Def. 6.
c. 11. 5.
d. 9. 5.

' Ut

'Ut ſequentes tres Propoſitiones facilius intelligantur praemittenda 'ſunt ſequentia.

'1. Parallelogrammum ad rectam lineam applicari dicitur, quando 'ſuper recta illa deſcribitur. Ex. gr. parallelogrammum AC applicari 'dicitur ad rectam AB, quando ſuper AB deſcribitur.

'2. Sed parallelogrammum AE applicari dicitur ad rectam AB defi-'ciens figurâ parallelogrammâ, quando AD 'baſis ipſius AE minor eſt rectâ AB, et 'propterea parallelogrammum AE deficit 'ab ipſo AC quod ſuper recta AB deſcribi-'tur in eodem angulo, et inter eaſdem parallelas, figurâ parallelogram-'mâ DC, quae quidem dicitur defectus ipſius AE.



'3. Et parallelogrammum AG applicari dicitur ad rectam AB, ex-'cedens figurâ parallelogrammâ, quando AF baſis ipſius AG major 'eſt rectâ AB, et propterea AG excedit ipſam AC figurâ parallelo-'grammâ BG.'

PROP. XXVII. THEOR.

OMNIUM parallelogrammorum ſecundum eandem rectam lineam applicatorum, et deficientium figuris parallelogrammis ſimilibus, et ſimiliter poſitis ei quae a dimidia deſcribitur, maximum eſt quod ad dimidiam eſt applicatum, ſimile exiſtens defectui.

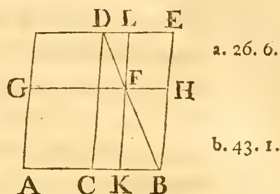
Sit recta linea AB, ſeceturque bifariam in C; et ad AB rectam lineam applicetur parallelogrammum AD deficiens figura parallelogramma CE quae a CB dimidia ipſius AB deſcripta eſt, cui ſcilicet ſimilis eſt AD. Dico omnium parallelogrammorum ad rectam lineam AB applicatorum

plicatorum, et deficientium figuris parallelogrammis ſimilibus, et ſimiliter poſitis ipſi CE, maximum eſſe AD.

Applicetur enim ad rectam lineam AB parallelogrammum AF, deficiens figura parallelogramma KH ſimili et ſimiliter poſita ipſi CE; dico AD parallelogrammum parallelogrammo AF majus eſſe.

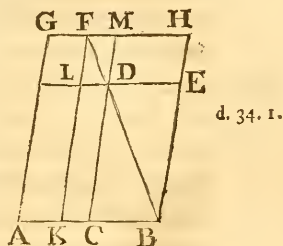
Sit primò recta AK baſis ipſius AF major ipſa AC; et quoniam ſimile eſt parallelogrammum CE parallelogrammo KH, circa eandem diametrum ſunt[a]. ducatur eorum diameter DB, et deſcribatur figura. quoniam igitur parallelogrammum CF eſt aequale ipſi FE[b] commune apponatur KH; totum igitur CH toti KE eſt aequale. ſed CH eſt aequale CG[c], quoniam et recta linea AC ipſi CB eſt aequalis; ergo et CG eſt aequale ipſi KE. commune apponatur CF; totum igitur AF eſt aequale gnomoni CHL; quare et CE, hoc eſt AD parallelogrammum parallelogrammo AF eſt majus.

a. 26. 6.
b. 43. 1.
c. 36. 1.



Secundò, Sit AK baſis ipſius AF minor AC, iiſdemque conſtructis, quoniam parallelogrammum DH aequale eſt ipſi DG[c], etenim HM ipſi MG eſt aequalis[d], erit DH ipſo LG majus. eſt autem DH aequale ipſi DK[b]; majus igitur eſt DK ipſo LG. commune apponatur AL; ergo totum AD toto AF eſt majus. Omnium igitur &c. Q. E. D.

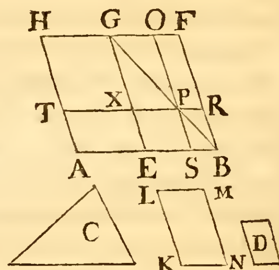
d. 34. 1.



PROP. XXVIII. PROB.

AD datam rectam lineam dato rectilineo aequale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma quae similis sit alteri datae. oportet autem datum rectilineum cui aequale applicandum est, non majus esse eo quod ad dimidiam applicatur, similibus existentibus defectibus, et ejus quod ad dimidiam, et ejus parallelogrammi cui oportet simile deficere.

Sit data quidem recta linea AB; datum autem rectilineum, cui oportet aequale ad datam rectam lineam AB applicare, sit C, non majus existens eo quod ad dimidiam applicatum est, similibus existentibus defectibus; cui autem oportet simile deficere sit D. oportet ad datam rectam lineam AB, dato rectilineo C aequale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma, quae similis sit ipsi D.



a. 10. 1. Secetur AB bifariam in E [a], et ab ipsa
b. 18. 6. EB describatur [b] simile, et similiter positum ipsi D; quod sit EBFG, et compleatur AG parallelogrammum. itaque AG vel aequale est ipsi C, vel eo majus, ob determinationem. et si quidem AG sit aequale C, factum jam erit quod proponebatur; etenim ad rectam lineam AB dato rectilineo C aequale parallelogrammum AG applicatum est, deficiens figura parallelogramma EF ipsi D simili. si autem non est aequale, erit AG majus quam C; atque EF aequale est AG; ergo, et EF quam C est majus. quo autem EF superat C, ei excessui aequale, ipsi

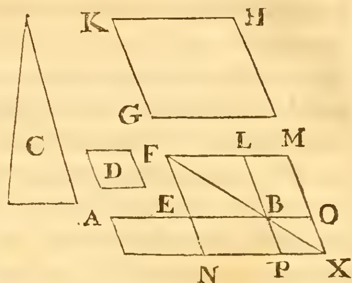
ipſi vero D ſimile, et ſimiliter poſitum, idem conſtituatur [c] KLMN. c. 25. 6.
ſed D eſt ſimile EF; quare et KM ipſi EF ſimile erit [d]. ſit igitur d. 21. 6.
recta linea KL homologa ipſi EG, LM vero ipſi GF. et quoniam aequale eſt EF ipſis C et KM, erit EF ipſo KM majus; major igitur eſt recta linea GE ipsâ LK, et GF ipsâ LM. ponatur GX aequalis LK, et GO aequalis LM, et compleatur XGOP parallelogrammum. aequale igitur et ſimile eſt XO ipſi KM; ſed KM ſimile eſt EF; ergo et XO ipſi EF eſt ſimile [d]. circa eandem igitur eſt diametrum XO cum ipſo EF [e]. ſit ipſorum diameter GPB, et figura deſcribatur. itaque e. 26. 6.
quoniam EF eſt aequale ipſis C et KM ſimul, quorum XO eſt aequale KM, erit reliquus ERO gnomon aequalis reliquo C. et quoniam OR eſt aequale [f] XS, commune apponatur SR; totum igitur OB f. 43. 1.
toti XB eſt aequale. ſed XB eſt aequale [g] TE, quoniam et latus AE g. 36. 1.
aequale eſt lateri EB; quare et TE ipſi OB aequale eſt. commune apponatur XS; ergo totum TS eſt aequale toti gnomoni ERO. at ERO gnomon ipſi C oſtenſus eſt aequalis; et TS igitur ipſi C aequale erit. quare ad datam rectam lineam AB, dato rectilineo C, aequale parallelogrammum TS applicatum eſt, deficiens figura parallelogramma SR ipſi D ſimili, quoniam et SR ſimile eſt ipſi EF [h]. Q. E. F. h. 24. 6.

PROP. XXIX. PROB.

AD datam rectam lineam, dato rectilineo aequale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quae ſimilis ſit alteri datae.

Sit data recta linea AB, datum vero rectilineum cui oportet aequale ad ipſam AB applicare ſit C; cui autem oportet ſimile excedere ſit D. oportet ad rectam lineam AB, dato rectilineo C aequale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma ſimili D.

Secetur AB bifariam in E, atque à EB ipsi D simile, et similiter po-
a. 18. 6. situm parallelogrammum describatur [a] EL. et utrisque quidem EL et
b. 25. 6. C aequale, ipsi vero D simile, et similiter positum idem constituatur [b]
GH. simile igitur est GH ipsi
c. 21. 6. EL [c]. sitque KH quidem latus homologum lateri FL, KG vero ipsi FE. et quoniam parallelogrammum GH majus est ipso EL, erit recta linea KH major quam FL, et KG major quam FE. producantur FL, FE, et ipsi quidem KH aequalis sit FLM, ipsi vero KG aequalis FEN, et compleatur MN parallelogrammum. ergo MN aequale est et simile ipsi GH; sed GH est simile EL; MN igitur ipsi EL simile erit, ac propterea circa eandem diametrum est EL cum ipso
d. 26. 6. MN [d]. ducatur ipsorum diameter FX, et figura describatur. itaque quoniam GH ipsis EL et C est aequale, sed GH aequale est MN; erit et MN aequale ipsis EL et C. commune auferatur EL; reliquus igitur NOL gnomon ipsi C est aequalis. et quoniam AE est aequalis
e. 36. 1. EB, aequale erit [e] et AN parallelogrammum parallelogrammo NB, hoc
f. 43. 1. est ipsi BM [f]. commune apponatur NO; totum igitur AX parallelogrammum aequale est gnomoni NOL. sed NOL gnomon est aequalis C; ergo et AX ipsi C erit aequale. ad datam igitur rectam lineam AB dato rectilineo C aequale parallelogrammum applicatum est AX, excedens figura parallelogramma PO, ipsi D simili, quoniam et ipsi
g. 24. 6. EL simile est PO [g]. Q. E. F.



PROP. XXX.

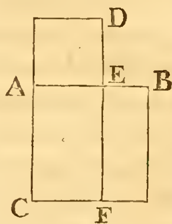
PROP. XXX. PROB.

DATAM rectam lineam terminatam ſecundum extremam ac mediam rationem ſecare.

Sit data recta linea AB, oportet ipſam AB ſecundum extremam ac mediam rationem ſecare.

Deſcribatur [a] ex AB quadratum BC, et ad AC ipſi BC aequale parallelogrammum applicetur [b] CD, excedens figura AD ipſi BC ſimili. quadratum autem eſt BC, ergo et AD quadratum erit. et quoniam BC eſt aequale CD, commune auferatur CE; reliquum igitur BF reliquo AD eſt aequale. eſt autem et ipſi aequiangulum. ergo ipſorum BF, AD latera, quae circum aequales angulos, reciproce ſunt proportionalia [c]. ut igitur FE ad ED, ita AE ad EB. eſt autem FE aequalis AC [d], hoc eſt ipſi AB; et ED ipſi AE. quare ut BA ad AE, ita AE ad EB. ſed AB major eſt quam AE; ergo AE quam EB eſt major [e]. recta igitur linea AB ſecundum extremam ac mediam rationem ſecta eſt in E [f]. Q. E. F.

a. 46. 1.
b. 29. 6.
c. 14. 6.
d. 34. 1.
e. 14. 5.
f. 3. Def. 6.



Aliter,

Sit data recta linea AB; oportet ipſam AB ſecundum extremam ac mediam rationem ſecare.

Secetur AB in C, ita ut rectangulum quod continetur ipſis AB, BC aequale ſit quadrato ex AC [g]. Quoniam igitur rectangulum ab AB, BC aequale eſt quadrato ex AC, erit ut BA ad AC, ita AC ad CB [h]. Ergo AB recta linea ſecundum extremam ac mediam rationem ſecta eſt in C [f]. Q. E. F.

A C B

g. 11. 2.
h. 17. 6.

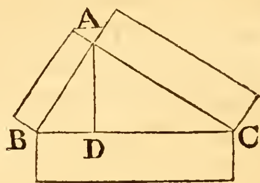
PROP. XXXI.

PROP. XXXI. THEOR.

IN triangulis rectangulis figura rectilinea quae fit a latere rectum angulum subtendente, aequale est eis quae a lateribus rectum angulum continentibus fiunt, similibus et similiter descriptis.

Sit triangulum rectangulum ABC, rectum habens angulum BAC. Dico figuram rectilineam quae fit à BC aequalem esse eis quae à BA, AC fiunt similibus, et similiter descriptis.

Ducatur perpendicularis AD; quoniam igitur in triangulo rectangulo ABC ab angulo recto qui est ad A, ad BC basim perpendicularis
a. 8. 6. ducta est AD, erunt [a] triangula ABD, ADC similia toti ABC, et inter se. et quoniam simile est ABC triangulum triangulo ABD, erit ut CB
b. 4. 6. ad BA, ita BA ad BD [b]. et quoniam tres rectae lineae proportionales sunt, ut prima ad tertiam, ita erit figura quae fit à prima ad eam quae à secunda,
c. 2. Cor. 20. 6. similem, et similiter descriptam [c]. ut igitur CB ad BD, ita figura quae fit à CB ad eam quae fit à BA, similem et simili-
d. B. 5. ter descriptam. et invertendo [d], ut DB ad BC, ita figura quae fit à BA ad eam quae à BC. eadem ratione, et ut DC ad CB, ita figura quae fit à CA ad eam quae fit à CB. quare et ut BD, DC simul ad BC, ita figurae
e. 24. 5. quae à BA, AC ad eam quae à BC [e]. aequales autem sunt BD, DC simul ipsi BC. ergo figura quae fit à BC aequalis est iis quae à BA, AC
f. A. 5. fiunt [f], similibus, et similiter descriptis. In triangulis igitur rectangulis &c. Q. E. D.



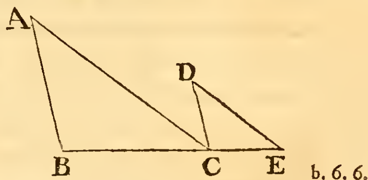
PROP. XXXII.

PROP. XXXII. THEOR.

SI duo triangula, quae duo latera duobus lateribus proportionalia habent, componantur ad unum angulum, ita ut homologa latera ipſorum ſint parallela; reliqua triangulorum latera in directum ſibi invicem erunt.

Sint duo triangula ABC, DCE quae duo latera BA, AC duobus lateribus CD, DE proportionalia habeant, ſc. ſit ut BA ad AC, ita CD ad DE; parallela autem ſit AB ipſi DC, et AC ipſi DE. Dico BC ipſi CE in directum eſſe.

Quoniam enim AB parallela eſt DC, et in ipſas incidit recta linea AC, erunt anguli alterni BAC, ACD aequales inter ſe [a]; eadem ratione a. 29. 1. et angulus CDE aequalis eſt angulo ACD; quare et BAC ipſi CDE eſt aequalis. et quoniam duo triangula ſunt ABC, DCE, unum angulum ad A uni ad D aequalem habentia, circum aequales autem angulos latera proportionalia, ſcilicet BA ad AC, ut CD ad DE; erit triangulum ABC triangulo DCE aequiangulum [b]. Ergo ABC angulus eſt aequalis b. 6. 6. angulo DCE. oſtenſus autem eſt et angulus BAC aequalis angulo ACD. totus igitur ACE duobus ABC, BAC eſt aequalis. communis apponatur ACB; ergo anguli ACE, ACB angulis ABC, BAC, ACB aequales ſunt. ſed ABC, BAC, ACB anguli duobus rectis ſunt aequales [c]; et anguli igitur ACE, ACB duobus rectis aequales erunt. itaque c. 32. 1. ad quandam rectam lineam AC, et ad punctum in ipſa C, duae rectae lineae BC, CE non ad eaſdem partes poſitae, angulos qui deinceps ſunt



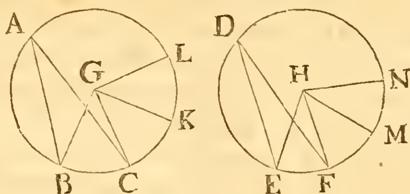
ſunt ACE, ACB duobus rectis aequales efficiunt. Ergo BC ipſi CE
d. 14. 1. in directum erit[d]. Si igitur duo triangula &c. Q. E. D.

PROP. XXXIII. THEOR.

IN circulis aequalibus anguli eandem habent rationem quam circumferentiae quibus inſiſtunt, ſive ſint ad centra, ſive ad circumferentias. adhuc etiam et ſectores.

Sint aequales circuli ABC, DEF; et ad centra quidem ipſorum G, H ſint anguli BGC, EHF, ad circumferentias vero anguli BAC, EDF. Dico ut circumferentia BC ad EF circumferentiam, ita eſſe et BGC angulum ad angulum EHF, et angulum BAC ad angulum EDF; et adhuc ſectorem BGC ad EHF ſectorem.

Ponantur enim circumferentiae quidem BC aequales quotcunque deinceps CK, KL; circumferentiae vero EF, rurſus aequales quotcunque

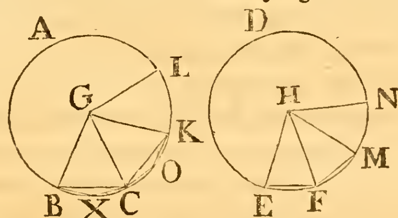


FM, MN; et jungantur GK, GL, HM, HN. Quoniam igitur circumferentiae BC, CK, KL inter ſe ſunt aequales, et anguli BGC, CGK,
a. 27. 3. KGL inter ſe aequales erunt[a]. quam multiplex igitur eſt circumferentia BL circumferentiae BC, tam multiplex eſt et BGL angulus anguli BGC. eadem ratione et quam multiplex eſt circumferentia EN circumferentiae EF, tam multiplex et EHN angulus anguli EHF. et ſi aequalis eſt BL circumferentia circumferentiae EN, et angulus BGL angulo

angulo EHN erit aequalis[a]; et ſi circumferentia BL major eſt circumferentia EN, major erit et BGL angulus angulo EHN; et ſi minor, minor. quatuor igitur exiſtentibus magnitudinibus, duabus nimirum circumferentiis BC, EF, et duobus angulis BGC, EHF; ſumpta ſunt circumferentiae BC, et BGC anguli utcunque aeque multiplicia, videlicet circumferentia BL et BGL angulus; circumferentiae vero EF, et EHF anguli, alia utcunque aeque multiplicia, nempe circumferentia EN, et angulus EHN. atque oſtenſum eſt ſi circumferentia BL ſuperat circumferentiam EN, et BGL angulum ſuperare angulum EHN; et ſi aequalis, aequalem; et ſi minor, minorem eſſe. ut igitur[b] circumferentia BC ad EF circumferentiam, ita angulus BGC ad angulum EHF. ſed ut angulus BGC ad angulum EHF, ita angulus BAC ad EDF angulum[c], uterque enim utriuſque eſt duplus[d]. et ut igitur BC circumferentia ad circumferentiam EF, ita et angulus BGC ad angulum EHF, et angulus BAC ad EDF angulum. Quare in circulis aequalibus anguli eandem habent rationem quam circumferentiae quibus inſiſtunt, ſive ſint ad centra, ſive ad circumferentias. Q. E. D.

a. 27. 3.
b. 5. Def. 5.
c. 15. 5.
d. 20. 3.

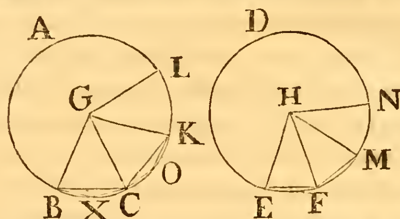
Dico inſuper et ut BC circumferentia ad circumferentiam EF, ita eſſe ſectorem BGC ad EHF ſectorem. Jungantur enim BC, CK, et



ſumptis in circumferentiis BC, CK punctis X, O, jungantur BX, XC, CO, OK. itaque quoniam duae BG, GC duabus CG, GK aequales ſunt, et angulos aequales continent, erit et baſis BC baſi CK aequa-

 lis,

e. 4. 1. lis, et triangulum GBC triangulo GCK [e] aequale. et quoniam circumferentia BC circumferentiae CK eſt aequalis, et reliqua circumferentia quae complet totum circulum ABC aequalis eſt reliquae quae eundem
a. 27. 3. circulum complet. quare et angulus BXC angulo COK eſt aequalis [a];
f. 11. Def. 3. ſimile igitur eſt BXC ſegmentum ſegmento COK [f]; et ſunt ſuper aequalibus rectis lineis BC, CK. ſuper aequalibus autem rectis lineis ſimilia
g. 24. 3. circulorum ſegmenta, inter ſe aequalia ſunt [g]. Ergo ſegmentum BXC eſt aequale ſegmento COK. eſt autem et BGC triangulum triangulo CGK aequale. et totus igitur ſector BGC toti ſectori CGK aequalis erit. eadem ratione et KGL ſector utrique ipſorum BGC, CGK aequalis erit. ſimiliter et ſectores EHF, FHM, MHN inter ſe ſunt ae-



quales. quam multiplex igitur eſt BL circumferentia circumferentiae BC, tam multiplex eſt BGL ſector ſectoris BGC. eadem ratione et quam multiplex eſt circumferentia EN circumferentiae EF, tam multiplex eſt et EHN ſector ſectoris EHF. et ſi circumferentia BL circumferentiae EN eſt aequalis, et ſector BGL aequalis eſt ſectori EHN; et ſi circumferentia BL ſuperat circumferentiam EN, ſuperat et BGL ſector ſectorem EHN; et ſi minor, minor. quatuor igitur exiſtentibus magnitudinibus, duabus quidem BC, EF circumferentiis, duobus vero ſectoribus BGC, EHF, ſumpta ſunt utcunque aeque multiplicia circumferentiae quidem BC et BGC ſectoris, circumferentia BL et BGL ſector; circumferentiae vero EF et ſectoris EHF, alia utcunque aeque multiplicia,

multiplicia, circumferentia EN et EHN ſector; atque oſtenſum eſt ſi BL circumferentia ſuperat circumferentiam EN, et ſectorem BGL ſuperare ſectorem EHN; et ſi aequalis, aequalem eſſe; et ſi minor minorem. eſt igitur ut BC circumferentia ad circumferentiam EF, ita ſector BGC ad EHF ſectorem.

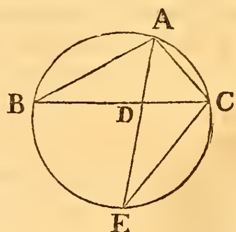
PROP. B. THEOR.

SI trianguli angulus bifariam ſecetur, ſecans autem angulum recta linea ſecet etiam baſim; rectangulum a lateribus trianguli contentum, aequale erit rectangulo contento a ſegmentis baſis una cum quadrato rectae lineae quae angulum bifariam ſecat.

Sit ABC triangulum, et bifariam ſecetur angulus BAC rectâ linea AD; erit rectangulum BA, AC aequale rectangulo BDC una cum quadrato ex AD.

Circa triangulum deſcribatur [a] circulus ACB, et producatur AD ad circumferentiam in E, et jungatur EC. igitur quoniam angulus BAD aequalis eſt angulo CAE, et angulus ABD angulo [b] AEC, ſunt enim in eodem ſegmento; erunt ABD, AEC triangula inter ſe aequiangula. Ergo ut BA ad AD, ita eſt [c] EA ad AC, et rectangulum BA, AC aequale erit [d] rectangulo EA, AD, hoc eſt [e] rectangulo ED, DA una cum quadrato ex AD. eſt autem rectangulum ED, DA aequale [f] rectangulo BD, DC. rectangulum igitur BA, AC aequale eſt rectangulo BD, DC una cum quadrato ex AD. Quare ſi trianguli &c. Q. E. D.

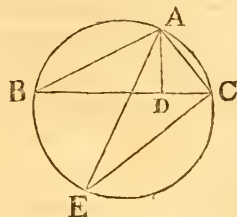
a. 5. 4.
b. 21. 3.
c. 4. 6.
d. 16. 6.
e. 3. 2.
f. 35. 3.



PROP. C. THEOR.

SI ab angulo trianguli ducatur perpendicularis ad basim, erit rectangulum lateribus trianguli contentum aequale rectangulo contento a perpendiculari et diametro circuli circa triangulum descripti.

Sit triangulum ABC, et ab angulo A ducatur AD perpendicularis ad basim BC, erit rectangulum BA, AC aequale rectangulo contento ab AD et diametro circuli circa triangulum descripti.



a. 5. 4. Circa triangulum describatur [a] circulus ACB, et ducatur diameter AE, et EC jungatur. Quoniam igitur angulus rectus BDA
b. 31. 3. aequalis est angulo ECA in semicirculo [b],
c. 21. 3. est autem angulus ABD aequalis [c] ipsi AEC in eodem segmento; aequiangula erunt triangula ABD, AEC. ut igi-
d. 4. 6. tur BA ad AD, ita est [d] EA ad AC, et propterea [e] rectangulum BA,
e. 16. 6. AC aequale est rectangulo EA, AD. Si igitur ab angulo &c. Q. E. D.

EUCLIDIS

EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBER UNDECIMUS.

DEFINITIONES.

I.

SOLIDUM eſt quod longitudinem, latitudinem et craſſitudinem habet.

II.

Solidi vero terminus eſt ſuperficies.

III.

Recta linea ad planum recta, ſive perpendicularis, eſt, quando ad omnes rectas lineas quae ipſam tangunt, et in ſubjecto ſunt plano, rectos angulos efficit.

IV.

Planum ad planum rectum eſt, cum rectae lineae quae communi planorum ſectioni ad rectos angulos in uno planorum ducuntur, alteri plano ad rectos ſunt angulos.

Rectae

V.

Rectae lineae ad planum inclinatio est, cum a sublimi termino rectae illius lineae ad planum ducta fuerit perpendicularis, atque a puncto quo plano occurrit, ad terminum rectae lineae qui est in plano, recta linea fuerit adjuncta; est, scilicet, angulus acutus adjuncta recta linea et insistente contentus.

VI.

Plani ad planum inclinatio est, angulus acutus rectis lineis contentus, quae ad rectos angulos communi planorum sectioni, ad idem ipsius punctum, in utroque planorum ducuntur.

VII.

Planum ad planum similiter inclinari dicitur, atque alterum ad alterum, cum dicti inclinationum anguli inter se fuerint aequales.

VIII.

Parallela plana sunt, quae inter se non conveniunt.

IX.

Solidus angulus est qui pluribus quam duobus planis angulis in eodem non existentibus plano, et ad unum punctum constitutis continetur.

X.

'Omissa est Definitio decima ob rationes in Notis adductas.'

XI.

Similes solidae figurae sunt, quae et singulos angulos solidos aequales habent, et quae similibus planis continentur, multitudine aequalibus.

XII.

Pyramis est figura solida planis contenta, quae ab uno plano ad unum punctum constituuntur.

XIII.

Prisma est figura solida quae planis continetur, quorum adversa duo sunt et aequalia et similia, et parallela; alia vero parallelogramma.

Sphaera

XIV.

Sphaera eſt figura deſcripta, quando ſemicirculi manente diametro, circumductus ſemicirculus revolvitur, donec in eundem locum a quo moveri coeperat reſtituatur.

XV.

Axis autem ſphaerae eſt quieſcens illa recta linea circum quam ſemicirculus convertitur.

XVI.

Centrum ſphaerae eſt idem quod et ſemicirculi.

XVII.

Diameter autem ſphaerae eſt recta quaedam linea per centrum ducta, et utrinque a ſphaerae ſuperficie terminata.

XVIII.

Conus eſt figura deſcripta, quando rectanguli trianguli manente uno latere eorum quae circa rectum angulum, circumductum triangulum revolvitur, donec in eundem locum a quo moveri coeperat reſtituatur. Et ſi quidem quieſcens recta linea aequalis ſit reliquae circa rectum angulum, quae ſc. convertitur, orthogonius erit conus; ſi vero minor, amblygonius; ſi vero major, oxygonius.

XIX.

Axis autem Coni eſt quieſcens illa recta, circa quam triangulum convertitur.

XX.

Baſis vero Coni eſt circulus qui a circumducta recta linea deſcribitur.

XXI.

Cylindrus eſt figura deſcripta, quando rectanguli parallelogrammi manente uno latere eorum quae circa rectum angulum, circumductum parallelogrammum revolvitur, donec in eundem locum a quo coeperat moveri reſtituatur.

Axis

XXII.

Axis autem Cylindri eſt quieſcens illa recta linea, circum quam parallelogrammum convertitur.

XXIII.

Baſes vero Cylindri ſunt circuli a duobus adverſis lateribus quae circumaguntur deſcripti.

XXIV.

Similes Coni et Cylindri ſunt, quorum axes et baſium diametri proportionales ſunt.

XXV.

Cubus eſt figura ſolida ſex quadratis aequalibus contenta.

XXVI.

Tetraedrum eſt figura ſolida quatuor triangulis aequalibus et aequilateris contenta.

XXVII.

Octaedrum eſt figura ſolida octo triangulis aequalibus et aequilateris contenta.

XXVIII.

Dodecaedrum eſt figura ſolida duodecim pentagonis aequalibus, et aequilateris et aequiangulis contenta.

XXIX.

Icoſaedrum eſt figura ſolida viginti triangulis aequalibus, et aequilateris contenta.

DEF. A.

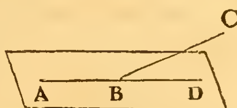
Parallelepipedum eſt figura ſolida ſex figuris quadrilateris, quarum quae ex adverſo parallelae ſunt, contenta.

PROP. I.

PROP. I. THEOR.

RECTAE lineae pars quaedam non eſt in ſubjecto plano, quaedam vero in ſublimi.

Si enim fieri poteſt, rectae lineae ABC pars quidem AB ſit in ſubjecto plano, pars vero BC in ſublimi. Erit igitur recta linea quaedam ipſi AB in directum continuata in ſubjecto plano; ſit DB. duabus igitur rectis lineis ABC, ABD commune ſegmentum eſt AB, quod fieri non poteſt [a]. Non igitur rectae &c. Q. E. D. a. Cor. 11. 1.

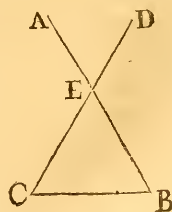


PROP. II. THEOR.

SI duae rectae lineae ſe invicem ſecent, in uno ſunt plano; et quaelibet tres rectae quae ſibi mutuo occurrunt, ſunt in uno plano.

Duae enim rectae lineae AB, CD ſe invicem in puncto E ſecent; erunt AB, CD in uno plano. et tres rectae EC, CB, BE quae ſibi mutuo occurrunt in uno ſunt plano.

Per rectam EB ducatur quodvis planum, et circa EB, productam ſi opus fuerit, convertatur planum donec tranſeat per punctum C; quoniam igitur puncta E, C ſunt in plano hoc, in eodem erit [a] recta EC; eadem ratione, in eodem plano eſt recta BC; et in eodem, ex hypotheſi, eſt recta EB. igitur tres rectae lineae EC, CB, BE in uno ſunt plano. in quo autem plano ſunt EC, EB in eodem ſunt [b] et rectae CD, AB. a. 7. Def. 1. b. 1. 11.

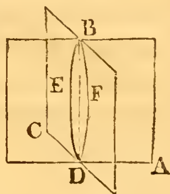


Ergo rectae lineae AB, CD in uno sunt plano. Igitur si duae rectae lineae &c. Q. E. D.

PROP. III. THEOR.

SI duo plana se invicem secent, communis ipsorum sectio recta linea erit.

Duo plana AB, BC se invicem secent, communis autem ipsorum sectio sit DB linea. Dico lineam DB esse rectam. si enim non ita sit, ducatur a puncto D ad B in plano quidem AB recta linea DEB; in plano autem BC recta linea DFB. Erunt igitur duarum rectarum linearum DEB, DFB iidem termini, et
a. 10. Ax. 1. ipsae spatium continebunt, quod est absurdum [a]. igitur planorum AB, BC, communis sectio BD non potest non esse recta linea; recta igitur est. Si igitur duo plana &c. Q. E. D.



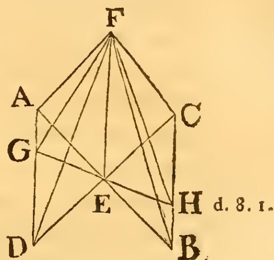
PROP. IV. THEOR.

SI recta linea duabus rectis lineis se invicem secantibus in communi sectione ad rectos angulos insistat, etiam ducto per ipsas plano ad rectos angulos erit.

Recta linea quaedam EF duabus rectis lineis AB, CD, se invicem secantibus in E puncto, ab ipso E ad rectos angulos insistat. Dico EF etiam plano per AB, CD ducto ad rectos angulos esse.

Sumantur enim rectae lineae AE, EB, CE, ED inter se aequales; et per E ducatur in plano per AB, CD, recta linea GEH utcunque, junganturque AD, CB; deinde a quovis, in recta EF, puncto F ducantur FA, FG, FD, FC, FH, FB. Et quoniam duae rectae lineae AE, ED

ED duabus rectis lineis BE, EC aequales sunt, et angulos aequales AED, BEC continent[a], erit AD basis basi CB aequalis, et angulus a. 15. 1. DAE aequalis angulo EBC[b]. est autem et angulus AEG, aequalis an- b. 4. 1. gulo BEH[a]. duo igitur triangula sunt AGE, BHE, duos angulos duobus angulis aequales habentia, alterum alteri, et unum latus AE uni lateri EB aequale quod aequalibus adjacet angulis; quare et reliqua latera reliquis lateribus aequalia habebunt[c]. ergo GE quidem est aequa- c. 26. 1. lis EH; AG vero ipsi BH. et quoniam AE est aequalis EB, communis autem, et ad rectos angulos FE, erit basis AF basi FB aequalis[b]; eadem quoque ratione et CF aequalis erit FD. praeterea quoniam AD est aequalis BC, et AF ipsi FB, erunt duae FA, AD duabus FB, BC aequales, altera alteri; et ostensa est basis DF aequalis basi FC; angulus igitur [d] FAD angulo FBC est aequalis. rursus, d. 8. 1. ostensa est AG aequalis BH, sed et AF ipsi FB est aequalis; duae igitur FA, AG duabus FB,



BH aequales sunt, et angulus FAG aequalis ostensus est angulo FBH; basis igitur GF basi FH est aequalis[b]. rursus, quoniam GE ostensa est aequalis EH, communis autem EF; erunt duae GE, EF aequales duabus HE, EF; et basis GF est aequalis basi FH; angulus igitur GEF angulo HEF est aequalis[d], et idcirco rectus est uterque angulorum GEF, HEF[e]. Ergo FE ad GH utcunque per E ductam e. 10. Def. 1. rectos efficit angulos. similiter ostendemus FE etiam ad omnes rectas lineas, quae ipsam tangunt, et in subjecto sunt plano, rectos angulos efficere. recta autem ad planum recta est quando ad omnes rectas lineas ipsum tangentes, et in eodem existentes plano rectos efficit angulos[f]. Quare FE subjecto plano ad rectos angulos insistit. Si igitur f. 3. Def. 11. recta linea &c. Q. E. D.

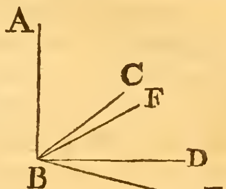
 PROP. V.

PROP. V. THEOR.

SI recta linea tribus rectis lineis ſeſe tangentibus, in communi ſectione, ad rectos angulos inſiſtat, tres illae rectae lineae in uno plano erunt.

Recta linea quaedam AB tribus rectis lineis BC, BD, BE, in tactu B, ad rectos angulos inſiſtat; dico BC, BD, BE in uno plano eſſe.

Non enim, ſed ſi fieri poteſt, ſint BD, BE quidem in ſubjecto plano, BC vero in ſublimi; et planum per AB, BC producatur; com-
a. 3. 11. munem igitur ſectionem in ſubjecto plano faciet rectam lineam [a]; faciat BF. in uno igitur ſunt plano per AB, BC ducto, tres rectae lineae AB, BC, BF. et quoniam AB utrique ipſarum BD, BE, ad rectos angulos inſiſtit, et ducto per ipſas DB, BE
b. 4. 11. plano ad rectos angulos erit [b]. planum autem per DB, BE eſt ſubjectum planum; ergo AB ad ſubjectum planum recta eſt; quare et ad omnes rectas lineas ipſam tangentes, quae in eodem plano ſunt,
c. 3. Def. 11. rectos [c] faciet angulos; ſed ipſam tangit BF in ſubjecto exiſtens plano. Ergo angulus ABF rectus eſt. ponitur autem et ABC angulus rectus; aequalis igitur eſt angulus ABF angulo ABC, et in eodem ſunt plano, quod fieri non poteſt. recta igitur linea BC non eſt in ſublimi; quare tres rectae lineae BC, BD, BE in uno ſunt plano. Si igitur recta linea &c. Q. E. D.



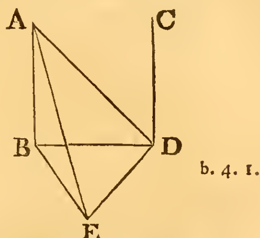
PROP. VI. THEOR.

SI duae rectae lineae eidem plano ad rectos angulos fuerint, illae inter ſe parallelae erunt.

Duae

Duae enim rectae lineae AB, CD subjecto plano sint ad rectos angulos; dico AB, ipsi CD parallelam esse.

Occurrant enim subjecto plano in punctis B, D, jungaturque BD recta linea, cui ad rectos angulos in subjecto plano ducatur DE, et ponatur DE aequalis ipsi AB, junganturque BE, AE, AD. Quoniam igitur AB recta est ad subjectum planum, et ad omnes rectas lineas quae ipsam tangunt, et in subjecto sunt plano rectos angulos efficiet[a]. a. 3. Def. 11. tangit autem ipsam AB utraque ipsarum BD, BE existens in subjecto plano. Ergo uterque angulorum ABD, ABE rectus est. eadem ratione rectus etiam est uterque ipsorum CDB, CDE. et quoniam AB aequalis est ipsi DE, communis autem BD, erunt duae AB, BD duabus ED, DB aequales; et rectos angulos continent; basis igitur AD basi BE est aequalis[b]. b. 4. 1. rursus, quoniam AB est aequalis DE, et BE ipsi AD, duae AB, BE duabus ED, DA aequales sunt, et basis AE communis; ergo angulus ABE angulo EDA est aequalis[c]. sed ABE rectus est; rectus igitur et EDA; et idcirco ED c. 8. 1. ad DA est perpendicularis. sed et perpendicularis est ad utramque ipsarum BD, DC. quare ED tribus rectis lineis BD, DA, DC in tactu ad rectos angulos insistit. tres igitur rectae lineae BD, DA, DC in uno sunt plano[d]. in quo autem sunt BD, DA, in eo est AB, quaevis enim d. 5. 11. tres rectae lineae quae sibi mutuo occurrunt, in uno sunt plano[e]. sunt e. 2. 11. igitur AB, BD, DC in uno plano. atque est uterque angulorum ABD, BDC rectus; parallela igitur est AB ipsi CD[f]. Quare si duae rectae f. 28. 1. lineae &c. Q. E. D.

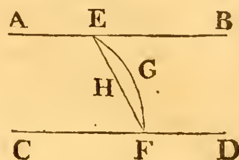


PROP. VII.

PROP. VII. THEOR.

SI duae rectae lineae parallelae ſint, ſumantur autem in utraque ipſarum quaelibet puncta; quae dicta puncta conjungit recta in eodem erit plano in quo et parallelae.

Sint duae rectae lineae parallelae AB, CD, et in utraque ipſarum ſumantur quaelibet puncta E, F; dico rectam lineam quae conjungit E, F in eodem plano eſſe in quo ſunt parallelae.



Non enim ſed, ſi fieri poteſt, ſit in ſublimi, ut EGF; et in plano ABCD, in quo ſunt parallelae, ducatur a puncto E ad F recta linea EHF; et recta ponitur EGF. Ergo duae rectae lineae EHF, EGF ſpatium continebunt, quod fieri
a. 10. Ax. 1. non poteſt [a]. non igitur quae a puncto E ad F ducitur recta linea in ſublimi eſt, quare erit in plano quod per AB, CD parallelas tranſit. Si igitur duae rectae &c. Q. E. D.

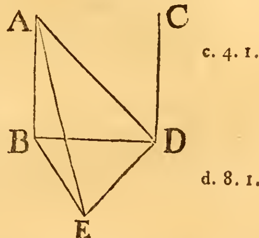
PROP. VIII. THEOR.

SI duae rectae lineae parallelae ſint, altera autem ipſarum plano alicui ſit ad rectos angulos; et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

Sint duae rectae lineae parallelae AB, CD, et altera ipſarum AB ſubjecto plano ſit ad rectos angulos. Dico reliquam CD eidem plano ad rectos angulos eſſe.

Occurrant enim AB, CD ſubjecto plano in punctis B, D, et BD jungatur.

jungatur. Ergo AB, CD, BD in uno ſunt plano. ducatur ipſi BD ad rectos angulos in ſubjecto plano DE, et ponatur DE ipſi AB aequalis, junganturque BE, AE, AD. et quoniam AB perpendicularis eſt ad ſubjectum planum, et ad omnes rectas lineas quae ipſam tangunt ſuntque in ſubjecto plano, perpendicularis erit[a]. rectus igitur eſt uterque angulorum ABD, ABE. quoniam vero in parallelas rectas lineas AB, CD recta incidit BD, erunt anguli ABD, CDB duobus rectis aequales[b]. rectus autem eſt ABD; ergo et CDB eſt rectus, ac propterea CD perpendicularis eſt ad BD. et quoniam AB eſt aequalis DE, communis autem BD, duae AB, BD duabus ED, DB aequales ſunt; et angulus ABD eſt aequalis angulo EDB, rectus enim uterque eſt; baſis igitur AD baſi BE eſt aequalis[c]. rurſus, quoniam AB aequalis eſt DE, et BE ipſi AD; erunt duae AB, BE duabus ED, DA aequales; et baſis communis AE; quare angulus ABE eſt aequalis angulo EDA[d]. rectus autem eſt ABE; ergo et EDA eſt rectus, et ED ad DA perpendicularis. ſed et perpendicularis eſt ad BD; ergo ED etiam ad planum per BD, DA perpendicularis erit[e], et ad omnes rectas lineas quae in eodem exiſtentes plano ipſam tangunt, rectos faciet angulos[f]. at in plano per BD, DA eſt DC, omnes enim tres ſunt in plano in quo ſunt rectae parallelae AB, CD. quare ED ipſi CD eſt ad rectos angulos; ideoque CD ad rectos angulos eſt ipſi DE; ſed et CD etiam ipſi DB. Ergo CD duabus rectis lineis DE, DB ſe mutuo ſecantibus in communi ſectione D ad rectos angulos inſiſtit; ac propterea plano per DE, DB eſt ad rectos angulos[e]. planum autem per DE, DB eſt ſubjectum planum. Ergo CD ſubjecto plano ad rectos angulos erit. Q. E. D.



a. 3. Def. 11.
b. 29. 1.
c. 4. 1.
d. 8. 1.
e. 4. 11.
f. 3. Def. 11.

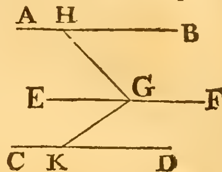
PROP. IX.

PROP. IX. THEOR.

QUAE eidem rectae lineae ſunt parallelae, non exiſtentes in eodem in quo ipſa plano, etiam inter ſe parallelae erunt.

Sit utraque ipſarum AB, CD parallela ipſi EF, non exiſtentes in eodem in quo ipſa plano. Dico AB ipſi CD parallelam eſſe.

Sumatur in EF punctum quodvis G, a quo ipſi EF in plano quidem per EF, AB tranſeunte, ad rectos angulos ducatur GH; in plano autem tranſeunte per EF, CD rurſus ducatur ipſi EF ad rectos angulos GK. et quoniam EF ad utramque ipſarum GH, GK eſt perpendicularis, erit etiam EF ad rectos angulos
a. 4. 11. plano per GH, GK tranſeunte [a]. atque eſt EF ipſi AB parallela; ergo et AB plano per HGK
b. 8. 11. ad rectos angulos eſt [b]. eadem ratione et CD plano per HGK eſt ad rectos angulos. utraque igitur ipſarum AB, CD plano per HGK ad rectos angulos erit. Si autem duae rectae lineae eidem plano ad rectos angulos fuerint,
c. 6. 11. parallelae erunt inter ſe [c]. Ergo AB ipſi CD parallela eſt. Q. E. D.



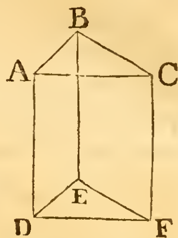
PROP. X. THEOR.

SI duae rectae lineae ſeſe tangentes, duabus rectis lineis ſeſe tangentibus ſint parallelae, non autem in eodem plano; aequales angulos continebunt.

Duae rectae lineae ſeſe tangentes AB, BC, duabus rectis lineis DE, EF ſeſe tangentibus ſint parallelae, non autem in eodem plano. Dico angulum ABC angulo DEF aequalem eſſe.

Aſſumantur

Aſſumantur enim BA, BC, ED, EF inter ſe aequales; et jungantur AD, CF, BE, AC, DF. Quoniam igitur BA ipſi ED aequalis eſt et parallela, erit et AD aequalis et parallela ipſi BE [a]. eadem ra- a. 33. 1.
tione et CF ipſi BE aequalis et parallela erit. utraque igitur ipſarum AD, CF ipſi BE aequalis eſt et parallela. quae autem eidem rectae lineae ſunt parallelae, non exiſtentes in eodem plano, et inter ſe parallelae erunt. Ergo AD parallela eſt ipſi CF [b]; b. 9. 11.
et ei eſt aequalis [c]; atque ipſas conjungunt AC, DF; c. 1. Ax. 1.
et AC igitur ipſi DF aequalis eſt et parallela [a]. et quoniam duae rectae lineae AB, BC duabus DE, EF aequales ſunt, et baſis AC eſt aequalis baſi DF; erit angulus ABC angulo DEF aequalis [d]. Si igitur duae rectae lineae &c. Q. E. D. d. 8. 1.

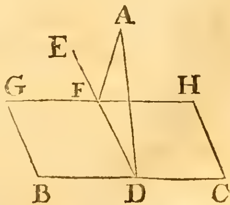


PROP. XI. PROB.

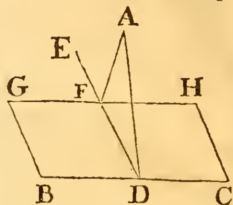
A Dato puncto in ſublimi, ad ſubjectum planum, perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit datum quidem punctum in ſublimi A, datum autem ſubjectum planum BH. oportet a puncto A ad ſubjectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

In ſubjecto plano ducatur quaedam recta linea utcunque BC, et a puncto A ad BC perpendicularis agatur AD [a]. a. 12. 1.
ſiquidem igitur AD perpendicularis ſit etiam ad ſubjectum planum, factum jam erit quod proponebatur; ſin minus, ducatur a puncto D ipſi BC, in ſubjecto plano, ad rectos angulos DE [b]; et a puncto A ad DE perpen- b. 11. 1.
dicularis ducatur [a] AF; denique per F duca-



c. 31. 1. tur GH ipsi BC parallela[c]. et quoniam BC utrique ipsarum ED, DA est ad rectos angulos, erit et BC ad rectos angulos plano per ED, DA
d. 4. 11. transeunti[d]. atque ipsi BC parallela est GH; si autem sint duae rectae lineae parallelae quarum una plano alicui sit ad rectos angulos, et re-
e. 8. 11. liqua eidem plano ad rectos angulos erit[e]; quare et GH plano per ED, DA transeunti ad rectos angulos est, ac propterea ad omnes rectas lineas quae in eodem plano existentes ipsam tangunt est per-
f. 3. Def. 11. pendicularis[f]. tangit autem ipsam recta AF existens in plano per ED, DA. Ergo GH perpendicularis est ad AF, et ob id AF est perpendicularis ad GH. est autem AF ad DE perpendicularis; ergo AF perpendicularis est ad utramque ipsarum GH, DE. si autem recta linea duabus rectis lineis sese tangentibus, in communi sectione, ad rectos angulos insistat, etiam plano per ipsas ducto ad rectos angulos erit[d]. quare AF plano per ED, GH ducto est ad rectos angulos. planum autem per ED, GH ductum est subjectum planum; ergo AF ad subjectum planum est perpendicularis. A dato igitur puncto sublimi A, ad subjectum planum, perpendicularis recta linea ducta est AF. Q. E. F.



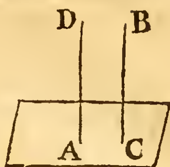
PROP. XII. PROB.

DATO plano, a puncto quod in ipso datum est, ad rectos angulos rectam lineam constituere.

Sit datum quidem planum illud quod est subjectum, punctum autem quod in ipso sit A. oportet à puncto A subjecto plano ad rectos angulos rectam lineam constituere.

Intelligatur aliquod punctum sublime B, a quo ad subjectum planum agatur

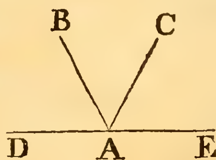
agatur perpendicularis BC[a]; et per A ipſi BC parallela ducatur AD[b]. a. 11. 11. b. 31. 1.
Quoniam igitur duae rectae parallelae ſunt AD, CB, una autem ipſarum BC ſubjecto plano eſt ad rectos angulos, et reliqua AD ſubjecto plano ad rectos angulos erit[c]. c. 8. 11. Dato igitur plano a puncto quod in ipſo eſt datum, ad rectos angulos recta linea conſtituta eſt. Q. E. F.



PROP. XIII. THEOR.

DATO plano, a puncto quod in ipſo eſt, duae rectae lineae ad rectos angulos non conſtituentur ex eadem parte. et unica eſt perpendicularis a puncto in ſublimi ad ſubjectum planum.

Si enim fieri poteſt, dato plano, a puncto quod in ipſo eſt A, duae rectae lineae AB, AC ad rectos angulos conſtituantur ex eadem parte; et ducatur planum per BA, AC, quod faciet ſectionem per A in ſubjecto plano rectam lineam[a]; a. 3. 11. faciat DAE. Ergo rectae lineae AB, AC, DAE in uno ſunt plano. et quoniam CA ſubjecto plano ad rectos angulos eſt, et ad omnes rectas lineas, quae in ſubjecto plano exiſtentes ipſam tangunt, rectos faciet angulos. tangit autem ipſam DAE, quae eſt in ſubjecto plano; angulus igitur CAE rectus eſt. eadem ratione et rectus eſt BAE. Ergo angulus CAE ipſi BAE eſt aequalis; et in uno ſunt plano, quod fieri non poteſt. Non igitur a dato plano a puncto quod in ipſo eſt, duae rectae lineae ad rectos angulos conſtituentur ex eadem parte. Et a puncto in ſublimi ad ſubjectum planum una tantum duci poteſt perpendicularis. ſi enim duae duci poſſint ab



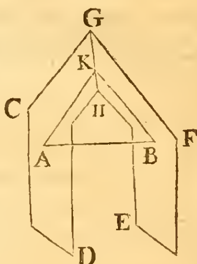
b. 6. 11. eodem puncto, essent inter se parallelae[b], quod est absurdum. Una igitur tantum duci potest. Q. E. D.

PROP. XIV. THEOR.

AD quae plana eadem recta linea est perpendicularis, ea parallela sunt.

Recta enim quaedam linea AB ad utrumque ipsorum planorum CD, EF sit perpendicularis. Dico ea plana parallela esse.

Si enim non ita sit, producta convenient inter se; conveniant, facient autem communem sectionem rectam lineam; faciant GH; et in ipsa GH sumpto quovis puncto K, jungantur AK, BK. Quoniam igitur AB recta est ad EF planum, erit et perpendicularis ad ipsam BK rectam
a. 3. Def. 11. lineam in plano EF producto existentem[a]. quare angulus ABK rectus est. eadem ratione et BAK est rectus; ideoque trianguli ABK duo anguli ABK, BAK duobus rectis sunt aequales, quod
b. 17. 1. fieri non potest[b]. non igitur plana CD, EF producta inter se convenient. Quare plana CD,
c. 8. Def. 11. EF sunt parallela[c]. Ad quae igitur plana &c. Q. E. D.



PROP. XV. THEOR.

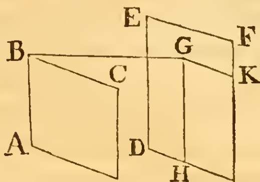
SI duae rectae lineae sese tangentes duabus rectis lineis sese tangentibus sint parallelae, non autem in eodem plano; et quae per ipsas transeunt plana parallela erunt.

Duae enim rectae lineae sese tangentes AB, BC, duabus rectis lineis sese tangentibus DE, EF parallelae sint, et non in eodem plano. Dico plana

plana quae per ABC, DEF tranſeunt, ſi producantur, inter ſe non convenire.

Ducatur * a puncto B ad planum quod per DEF tranſit, perpendicularis BG, quae plano in puncto G occurrat; et per G ducatur * ipſi quidem ED parallela GH; ipſi vero EF parallela GK. itaque quoniam BG perpendicularis eſt ad planum per DE, EF, et ad omnes rectas lineas quae ipſam tangunt, et in eodem ſunt plano, rectos faciet angulos [a]. tangit autem ipſam utraque ipſarum GH, GK, quae in eo ſunt plano. rectus igitur eſt uterque angulorum BGH, BGK. et quoniam BA parallela eſt ipſi GH*, (utraque enim ipſarum parallela eſt ipſi DE non in eodem cum ipſa plano) anguli GBA, BGH duobus rectis ſunt aequales [b]. rectus autem eſt BGH, ergo et GBA rectus erit, ideoque GB ad BA eſt perpendicularis. eadem ratione et GB perpendicularis eſt ad BC. quoniam igitur recta linea GB duabus rectis lineis BA, BC ſe invicem ſecantibus ad rectos angulos inſiſtat, erit GB etiam ad planum per BA, BC ductum perpendicularis [c]. atque eſt ad planum per DE, EF perpendicularis; ergo BG perpendicularis eſt ad utrumque planorum quae per ABC, DEF tranſeunt. ad quae vero plana eadem recta linea eſt perpendicularis, ea parallela ſunt [d]. parallelum igitur eſt planum per AB, BC plano per DE, EF. Quare ſi duae rectae lineae &c. Q. E. D.

* 11. 11.
* 31. 1.
a. 3. Def. 11.
* 9. 11.
b. 29. 1.
c. 4. 11.
d. 14. 11.



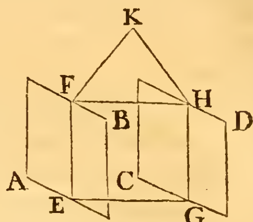
PROP. XVI. THEOR.

SI duo plana parallela ab aliquo plano ſecentur, communes ipſorum ſectiones parallelae erunt.

Duo

Duo plana parallela AB, CD a plano aliquo EFHG ſecentur, communes autem ipſorum ſectiones ſint EF, GH. Dico EF ipſi GH parallelam eſſe.

Si enim non eſt parallela, productae EF, GH inter ſe convenient, vel ad partes FH, vel ad partes EG. producantur prius, ut ad partes FH, et conveniant in K. quoniam igitur EFK eſt in plano AB, et omnia quae in EFK ſumuntur puncta in eodem plano erunt; unum autem punctorum quae ſunt in EFK eſt ipſum K punctum; ergo K eſt in plano AB. eadem ratione et K eſt in CD plano. ergo plana AB, CD producta inter ſe convenient; non conveniunt autem, cum parallela ponantur. non igitur EF, GH rectae lineae productae convenient ad partes FH. ſimiliter demonſtrabimus neque rectas EF, GH ad partes EG convenire, ſi producantur. quae autem, in eodem plano, productae neutra ex parte conveniunt parallelae ſunt. Ergo EF ipſi GH eſt parallela. Si igitur duo plana &c. Q. E. D.



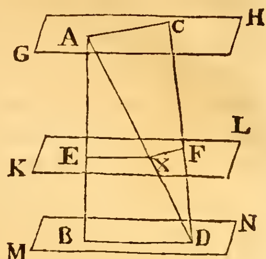
PROP. XVII. THEOR.

SI duae rectae lineae a parallelis ſecentur planis, in eadem ratione ſecabuntur.

Duae enim rectae lineae AB, CD a parallelis planis GH, KL, MN ſecentur in punctis A, E, B; C, F, D. Dico ut AE recta linea ad ipſam EB, ita eſſe CF ad FD.

Jungantur enim AC, BD, AD, et occurrat AD plano KL in puncto X; et EX, XF jungantur. Quoniam igitur duo plana parallela KL, MN a plano EBDX ſecantur, communes ipſorum ſectiones EX, BD parallelae

parallelae ſunt[a]. eadem ratione quoniam duo plana parallela GH, KL a. 16. 11. a plano AXFC ſecantur, communes ipſorum ſectiones AC, XF ſunt parallelae. et quoniam uni laterum trianguli ABD, videlicet ipſi BD, parallela ducta eſt EX, ut AE ad EB, ita erit AX ad XD[b]. rurſus, quoniam uni laterum trianguli ADC, nempe ipſi AC, parallela ducta eſt XF, erit ut AX ad XD, ita CF ad FD. oſtenſum autem eſt ut AX ad XD, ita eſſe AE ad EB. ut igitur AE ad EB, ita CF ad FD[c]. Quare ſi duae rectae c. 11. 5. lineae &c. Q. E. D.

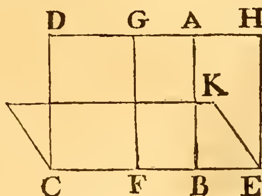


b. 2. 6.

PROP. XVIII. THEOR.

SI recta linea plano alicui ſit ad rectos angulos, et omnia quae per ipſum tranſeunt plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

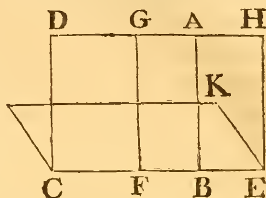
Recta enim linea quaedam AB ſubjecto plano ſit ad rectos angulos. Dico et omnia plana quae per ipſam AB tranſeunt ſubjecto plano ad rectos angulos eſſe.



Producatur enim per AB planum DE, ſitque plani DE et ſubjecti plani communis ſectio CE; et ſumatur in CE quodvis punctum F, a quo ipſi CE ad rectos angulos, in DE plano ducatur FG. quoniam igitur AB ad ſubjectum planum eſt perpendicularis, et ad omnes rectas lineas, quae ipſam tangunt et in ſubjecto ſunt plano perpendicularis erit[a]; quare etiam ad CE a. 3. Def. 11.

eſt

eſt perpendicularis. angulus igitur ABF rectus eſt; ſed et GFB eſt
b. 28. 1. rectus; ergo AB parallela eſt ipſi FG[b]. eſt autem AB ſubjecto plano ad rectos angulos; et FG igitur eidem
c. 8. 11. plano ad rectos angulos erit[c]. at planum ad planum rectum eſt, quando communi planorum ſectioni ad rectos angulos ductae rectae lineae in uno planorum, reliquo pla-
d. 4. Def. 11. no ad rectos angulos ſunt[d]; communi vero planorum ſectioni CE in uno plano DE ad rectos angulos ducta FG, oſtenſa eſt ſubjecto plano ad rectos eſſe angulos; ergo planum DE rectum eſt ad ſubjectum planum. ſimiliter demonſtrabuntur et omnia quae per AB tranſeunt plana ſubjecto plano recta eſſe. Si igitur recta linea &c. Q. E. D.

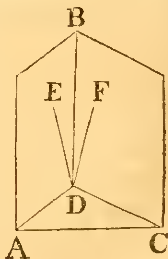


PROP. XIX. THEOR.

SI duo plana ſe invicem ſecantia plano alicui ſint ad rectos angulos; et communis ipſorum ſectio eidem plano ad rectos angulos erit.

Duo enim plana ſe invicem ſecantia AB, BC ſubjecto plano ſint ad rectos angulos; communis autem ipſorum ſectio ſit BD. Dico BD ſubjecto plano ad rectos angulos eſſe.

Non enim ſit; et a puncto D ducatur in plano quidem AB rectae lineae AD ad rectos angulos ipſa DE. in plano autem BC ducatur ipſi CD ad rectos angulos DF. et quoniam planum AB ad ſubjectum planum rectum eſt, et communi ipſorum ſectioni AD ad rectos angulos in plano AB ducta eſt DE, erit DE ad ſubjectum planum perpendicula-



ris[a].

ris[a]. ſimiliter oſtendemus et DF perpendicularem eſſe ad ſubjectum planum. quare ab eodem puncto D ſubjecto plano duae rectae lineae ad rectos angulos conſtitutae ſunt ex eadem parte, quod fieri non poteſt[b]. non igitur ſubjecto plano a puncto D ad rectos angulos conſtituetur alia recta linea praeter ipſam DB communem planorum AB, BC ſectionem. Quare DB ſubjecto plano eſt perpendicularis. Ergo ſi duo plana &c. Q. E. D.

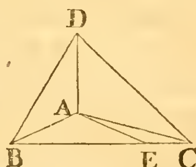
a. 4. Def. 11.
b. 13. 11.

PROP. XX. THEOR.

SI ſolidus angulus tribus angulis planis contineatur, duo quilibet reliquo majores ſunt, quomodocunque ſumpti.

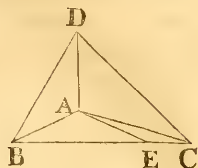
Solidus enim angulus ad A tribus angulis planis BAC, CAD, DAB continetur. Dico angulorum BAC, CAD, DAB duos quoſlibet reliquo majores eſſe, quomodocunque ſumptos.

Si enim BAC, CAD, DAB anguli inter ſe aequales ſint, perſpicuum eſt duos quoſlibet reliquo majores eſſe, quomodocunque ſumptos. ſin minus, ſit angulus BAC non minor utrovis ex reliquis, major autem quam DAB; et ad rectam lineam AB et punctum in ipſa A, conſtituatur angulo DAB[a], in plano per BA, AC tranſeunte, aequalis angulus BAE; ponaturque ipſi AD aequalis AE; et per E ducta BEC ſecet rectas lineas AB, AC in punctis B, C, et DB, DC jungantur. itaque quoniam DA eſt aequalis AE, communis autem AB, duae DA, AB duabus EA, AB aequales ſunt, et angulus DAB aequalis eſt angulo BAE. baſis igitur DB baſi BE eſt aequalis[b]. et quoniam duae BD, DC ipſa CB majores ſunt[c], quarum DB aequalis oſtenſa eſt ipſi BE; erit reliqua DC quam



a. 23. 1.
b. 4. 1.
c. 20. 1.

reliqua EC major. et quoniam DA eſt aequalis AE, communis autem AC et baſis DC major baſi EC; erit angulus d. 25. 1. DAC angulo EAC major[d]. et ex conſtructione eſt DAB angulus aequalis ipſi BAE; quare DAB, DAC anguli, angulo BAC majores ſunt. eſt autem angulus BAC non minor utrovis ex ipſis DAB, DAC, quare BAC una cum altero ex ipſis, reliquo erit major. Si igitur ſolidus angulus &c. Q. E. D.

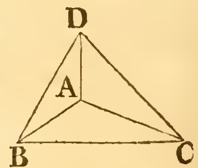


PROP. XXI. THEOR.

OMNIS ſolidus angulus, minoribus quam quatuor rectis angulis planis continetur.

Primum, Sit ſolidus angulus ad A, tribus planis angulis BAC, CAD, DAB contentus. Dico angulos BAC, CAD, DAB quatuor rectis eſſe minores.

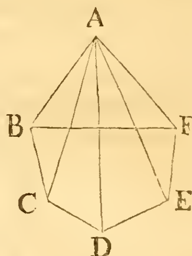
Sumantur enim in unaquaque ipſarum AB, AC, AD quaevis puncta B, C, D, et BC, CD, DB jungantur. Quoniam igitur ſolidus angulus ad B, tribus planis angulis CBA, ABD, DBC continetur, duo quilibet reli- a. 20. 11. quo majores ſunt[a]; anguli igitur CBA, ABD, angulo DBC ſunt majores. eadem ratione, et anguli quidem BCA, ACD majores ſunt angulo DCB; anguli vero CDA, ADB majores angulo BDC. quare ſex anguli CBA, ABD, BCA, ACD, CDA, ADB tribus angulis DBC, BCD, CDB ſunt majores. ſed tres anguli DBC, BCD, CDB, ſunt aequales b. 32. 1. duobus rectis[b]. ſex igitur anguli CBA, ABD, BCA, ACD, CDA, ADB duobus rectis majores ſunt. et quoniam ſingulorum triangulorum ABC,



ABC, ACD, ADB tres anguli ſunt aequales duobus rectis, erunt trium triangulorum novem anguli CBA, BAC, ACB, ACD, CDA, DAC, ADB, DBA, BAD aequales ſex rectis. quorum ſex anguli CBA, ACB, ACD, CDA, ADB, DBA duobus rectis ſunt majores. reliqui igitur tres anguli BAC, CAD, DAB, qui ſolidum continent angulum, quatuor rectis minores ſunt.

Sed ſit ſolidus angulus ad A contentus quotcunque planis angulis BAC, CAD, DAE, EAF, FAB; erunt hi omnes ſimul minores quatuor rectis.

Occurrat planum aliquod planis in quibus ſunt anguli, ſintque communes ejus ſectiones cum hiſce planis rectae BC, CD, DE, EF, FB. Quoniam igitur ſolidus angulus ad B, tribus planis angulis CBA, ABF, FBC continetur, duo quilibet reliquo majores ſunt[a]; anguli igitur CBA, ABF, angulo FBC ſunt majores. eadem ratione et duo anguli plani ad unumquodque ex punctis C, D, E, F, qui anguli ſunt ad baſes triangulorum quorum vertex communis eſt A, majores ſunt reliquo angulo ad idem punctum, qui ſcilicet eſt angulus polygoni BCDEF. Omnes igitur anguli qui ſunt ad baſes triangulorum ſimul majores ſunt omnibus polygoni angulis. Quoniam vero omnes anguli triangulorum ſimul aequales ſunt bis tot rectis quot ſunt triangula[b], hoc eſt quot ſunt latera polygoni BCDEF; omnes autem anguli polygoni una cum quatuor rectis aequales etiam ſunt bis tot rectis quot ſunt polygoni latera[c]; erunt omnes triangulorum anguli aequales omnibus angulis polygoni una cum quatuor rectis. Omnes vero anguli ad baſes triangulorum majores oſtenſi ſunt omnibus polygoni angulis. Ergo triangulorum reliqui anguli, quibus ſcilicet ſolidus angulus ad A continetur minores ſunt



a. 20. 11.

b. 32. 1.

c. 1. Cor. 32. 1.

 quatuor

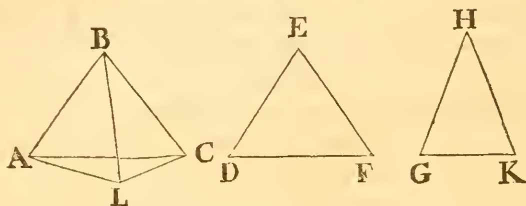
quatuor rectis. Omnis igitur solidus angulus minoribus quam quatuor rectis angulis planis continetur. Q. E. D.

PROP. XXII. THEOR.

SI sint tres anguli plani quorum duo reliquo sunt majores, quomodocunque sumpti, contineant autem ipsos rectae lineae aequales; fieri potest, ut ex iis quae rectas aequales conjungunt, triangulum constituatur.

Sint tres anguli plani ABC, DEF, GHK, quorum duo reliquo sunt majores, quomodocunque sumpti; contineant autem ipsos aequales rectae lineae AB, BC, DE, EF, GH, HK, et AC, DF, GK jungantur. Dico fieri posse ut ex rectis ipsis AC, DF, GK aequalibus triangulum constituatur; hoc est duas reliquâ majores esse quomodocunque sumptas.

Si quidem igitur anguli ad B, E, H sint aequales, et AC, DF, GK
a. 4. 1. aequales erunt [a], et duae reliquâ majores. sin minus, sint inaequales



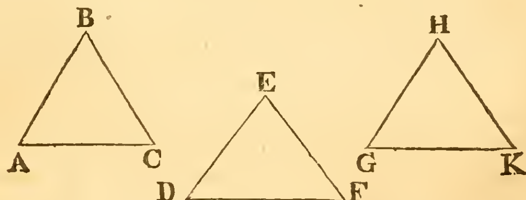
anguli ad B, E, H, et sit angulus ad B non minor utrovis ex ipsis ad
b. 4. vel 24. 1. E, H. non igitur minor est et recta AC utrâvis ex ipsis DF, GK [b].
et manifestum est ipsam AC unà cum altera ipsarum DF, GK, reliquâ
c. 23. 1. esse majorem. Dico et DF, GK ipsa AC majores esse. constituatur [c]
ad rectam lineam AB et ad punctum in ea B, angulo GHK aequalis angulus

angulus ABL, et uni ipſarum AB, BC, DE, EF, GH, HK ponatur aequalis BL, et AL, LC jungantur. Quoniam igitur duae AB, BL duabus GH, HK aequales ſunt, altera alteri, et angulos aequales continent, erit baſis AL baſi GK aequalis[a]. et quoniam anguli ad E, H, a. 4. 1.
angulo ABC majores ſunt, quorum angulus GHK eſt aequalis ipſi ABL; erit reliquus qui ad E, angulo LBC major. et quoniam duae LB, BC duabus DE, EF aequales ſunt, altera alteri, et angulus DEF angulo LBC major, baſis DF baſi LC major erit[d]. oſtenſa autem eſt d. 24. 1.
GK aequalis AL; ergo DF, GK, ipſis AL, LC ſunt majores. ſed AL, LC majores ſunt ipſa AC[e]; multo igitur DF, GK, ipſa AC majores e. 20. 1.
ſunt. Quare rectarum linearum AC, DF, GK duae reliquâ majores ſunt, quomodocunque ſumptae; ac propterea fieri poteſt[f] ut ex aequa- f. 22. 1.
libus ipſis AC, DF, GK triangulum conſtituatur. Q. E. D.

PROP. XXIII. PROB.

EX tribus datis angulis planis, quorum duo reliquo ſunt majores, quomodocunque ſumpti, ſolidum angulum conſtituere. oportet autem tres angulos quatuor rectis eſſe minores.

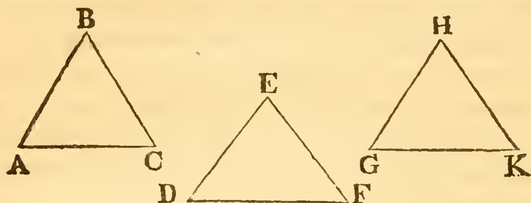
Sint dati tres anguli plani ABC, DEF, GHK, quorum duo re-



liquo ſunt majores, quomodocunque ſumpti, ſintque tres anguli quatuor rectis

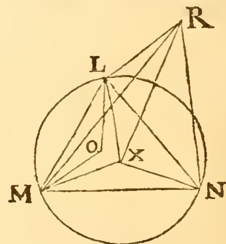
rectis minores. oportet ex aequalibus ipſis ABC, DEF, GHK ſolidum angulum conſtituere.

Abſcindantur aequales AB, BC, DE, EF, GH, HK; et AC, DF, GK jungantur. fieri igitur poteſt ut ex aequalibus ipſis AC, DF,



a. 22. 11. b. 22. 1. GK conſtituatur triangulum[a]. Itaque conſtituatur [b] LMN, ita ut AC quidem ſit aequalis LM, DF vero ipſi MN, et praeterea GK ipſi NL;
c. 5. 4. et circa triangulum LMN circulus LMN deſcribatur[c]; ſumaturque ipſius centrum X, quod vel erit intra triangulum LMN, vel in uno ejus latere, vel extra.

Sit primum intra, et LX, MX, NX jungantur. Dico AB majorem eſſe LX. ſi enim non ita ſit, vel AB erit aequalis LX, vel eâ minor; ſit primum aequalis. Quoniam igitur AB eſt aequalis LX, atque eſt AB ipſi BC aequalis, et LX ipſi XM, duae AB, BC duabus LX, XM aequales erunt, altera alteri; et baſis AC baſi LM aequalis ponitur; quare angulus
d. 8. 1. ABC angulo LXM eſt aequalis[d]. eadem ratione et angulus quidem DEF eſt aequalis angulo MXN, angulus vero GHK angulo NXL.

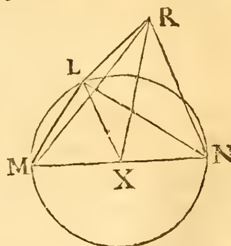


tres igitur anguli ABC, DEF, GHK tribus LXM, MXN, NXL ae-
e. 2. Cor. 15. 1. quales ſunt. ſed tres LXM, MXN, NXL quatuor rectis ſunt aequales[e]; ergo et tres ABC, DEF, GHK aequales erunt quatuor rectis. atqui ponuntur

ponuntur quatuor rectis minores; quod est absurdum. non igitur AB ipsi LX est aequalis. Dico praeterea neque AB minorem esse LX. si enim fieri potest, sit minor, et super rectam lineam LM ad partes ejus ad quas est centrum X constituatur triangulum LOM, cujus latera LO, OM aequalia sint ipsis AB, BC[b]; et quoniam basis LM basi AC est aequalis, erit angulus LOM aequalis angulo ABC[d]. ponitur autem recta AB, hoc est LO, minor ipsa LX; quare LO, MO cadent intra triangulum LXM, si enim congruerent ipsis LX, XM, vel caderent extra, aequales, vel majores essent ipsis LX, XM[f]. angulus igitur LOM, hoc est ABC, major est angulo LXM[f]. similiter ostendetur angulus DEF major angulo MXN, et angulus GHK major ipso NXL. tres igitur anguli ABC, DEF, GHK tribus LXM, MXN, NXL, hoc est quatuor rectis, sunt majores. anguli autem ABC, DEF, GHK ponuntur quatuor rectis minores; quod est absurdum. non igitur AB minor est quam LX. ostensum autem est neque esse aequalem. major igitur est AB quam LX.

b. 22. 1.
d. 8. 1.
f. 21. 1.

Sed sit centrum circuli in uno laterum trianguli, videlicet in MN, et sit X, atque XL jungatur. Dico rursus AB majorem esse LX. si enim non ita sit, vel AB est aequalis LX, vel ipsa minor. sit primum aequalis. duae igitur AB, BC, hoc est DE, EF duabus MX, XL, hoc est ipsi MN aequales sunt, sed MN ponitur aequalis DF; ergo DE, EF ipsi DF sunt aequales; quod fieri non potest*. non igitur AB est aequalis LX. similiter neque minor; multo enim magis absurdum sequeretur. major igitur est AB ipsâ LX.

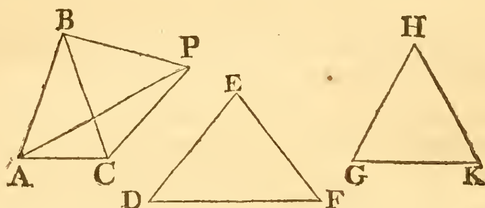


* 20. 1.

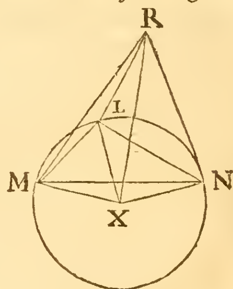
Sed sit centrum circuli X extra triangulum LMN, et LX, MX, NX jungantur. Dico et sic AB ipsâ LX majorem esse. si enim non ita sit,

vel

vel aequalis eſt, vel minor. ſit primum aequalis, et omnino ut in primo caſu oſtendetur angulus quidem ABC aequalis angulo MXL, angulus vero GHK angulo LXN; totus igitur MXN eſt aequalis duobus ABC, GHK. ſed ipſi ABC, GHK ſimul angulo DEF majores ſunt; et angulus igitur MXN ipſo DEF eſt major. quoniam vero duae DE, EF duabus MX, XN aequales ſunt, et baſis DF baſi MN, erit MXN an-
d. 8. 1. gulus angulo DEF aequalis[d]. oſtenſus autem eſt major; quod eſt ab-



ſurdum. non igitur AB eſt aequalis LX. Dico vero neque minorem eſſe AB ipsâ LX. ſi enim fieri poteſt, ſit minor; erit igitur, ut in primo caſu oſtenſum, angulus quidem ABC angulo MXL major, angulus vero GHK major angulo LXN. conſtituatur ad rectam lineam BC, et ad punctum in ea B, angulo GHK aequalis angulus CBP, et ponatur BP aequalis ipſi HK, et jungantur CP, AP. et quoniam CB eſt aequalis GH, duae CB, BP aequales ſunt duabus GH, HK, et aequales angulos continent; baſis igitur CP baſi GK ſive LN eſt aequalis. in triangulis autem iſoſcelibus ABC, MXL quoniam an-



gulus ABC major eſt angulo MXL, erit angulus MLX ad baſim ma-
g. 32. 1. jor angulo ad baſim ACB[g]. eadem ratione quoniam GHK, hoc eſt angulus CBP, major eſt angulo LXN, et angulus XLN major erit ipſo BCP.

BCP. totus igitur MLN major eſt toto ACP. et quoniam duae ML,
LN duabus AC, CP ſunt aequales, et angulus MLN major angulo ACP,
erit et baſis MN baſi AP major[h]. ſed MN eſt aequalis DF; ergo et h. 24. 1.
DF quam AP major erit. quoniam igitur duae DE, EF duabus AB,
BP aequales ſunt, altera alteri, et baſis DF major baſi AP, erit angu-
lus DEF angulo ABP major[k]. aequalis autem eſt angulus ABP an- k. 25. 1.
gulis ABC, CBP, hoc eſt angulis ABC, GHK; ergo DEF angulus
angulis ABC, GHK major eſt; ſed et minor; quod fieri non poteſt.
non igitur AB minor eſt quam LX. oſtenſum autem eſt neque eſſe
aequalem; major igitur eſt AB quam LX.

Conſtituatur a puncto X, circuli LMN plano ad rectos angulos XR[l]. l. 12. 11.
et quoniam in omnibus caſibus AB oſtenſa eſt major LX, exceſſui quo
quadratum ex AB ſuperat quadratum ex LX, ponatur aequale quadra-
tum quod fit ex RX, et RL, RM, RN jungantur. quoniam igitur RX
perpendicularis eſt ad planum LMN circuli, et ad unamquamque ip-
ſarum LX, MX, NX erit perpendicularis[m]. et quoniam LX eſt ae- m. 3. Def. 11.
qualis XM, communis autem et ad rectos angulos XR, erit baſis RL
baſi RM aequalis. eadem ratione et RN utrique ipſarum RL, RM
eſt aequalis. tres igitur rectae lineae RL, RM, RN inter ſe aequales
ſunt. et quoniam quadratum ab XR ponitur aequale exceſſui quo qua-
dratum ex AB ſuperat quadratum ex LX; erit quadratum ex AB qua-
dratis ex LX, XR aequale. quadratis autem ex LX, XR aequale[n] n. 47. 1.
eſt quadratum ex RL; rectus enim angulus eſt LXR. ergo quadratum
ex AB quadrato ex RL aequale erit; ideoque AB ipſi RL eſt aequa-
lis. Sed ipſi quidem AB aequalis eſt unaquaeque ipſarum BC, DE,
EF, GH, HK; ipſi vero RL aequalis utraque ipſarum RM, RN.
unaquaeque igitur ipſarum AB, BC, DE, EF, GH, HK unicuique
ipſarum RL, RM, RN eſt aequalis. et quoniam duae RL, RM dua-
bus AB, BC aequales ſunt, et baſis LM eſt aequalis baſi AC; erit an-

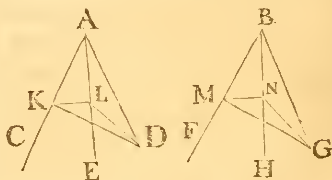
d. 8. 1. gulus LRM aequalis [d] angulo ABC. eadem ratione et angulus quidem MRN angulo DEF, angulus autem NRL angulo GHK est aequalis. Ex tribus igitur angulis planis LRM, MRN, NRL, qui aequales sunt tribus datis ABC, DEF, GHK solidus angulus constitutus est ad R. Q. E. F.

PROP. A. THEOR.

SI sint duo anguli solidi, quorum uterque continetur tribus angulis planis qui inter se aequales sunt, singuli singulis; plana in quibus sunt aequales anguli erunt ad se invicem similiter inclinata.

Sint duo anguli solidi ad puncta A, B; et contineatur angulus ad A tribus planis angulis CAD, CAE, EAD; angulus vero B contineatur tribus angulis planis FBG, FBH, HBG, quorum angulus quidem CAD angulo FBG est aequalis, angulus vero CAE angulo FBH, et EAD ipsi HBG. erunt plana in quibus sunt aequales anguli similiter ad se invicem inclinata.

Sumatur enim in recta linea AC punctum quodvis K, et a puncto K ad rectos angulos ipsi AC ducatur in plano quidem CAD recta KD, in plano vero CAE recta KL. est igitur angulus DKL inclinatio plani
a. 6. Def. 11. CAD ad ipsum CAE [a]. in recta vero BF ipsi AK aequalis ponatur BM, et a puncto M ducantur in planis FBG, FBH rectae lineae MG, MN ad rectos angulos ipsi BF; erit igitur angulus GMN inclinatio plani FBG ad ipsum FBH [a]. jungantur LD, NG; et quoniam in triangulis KAD, MBG aequales sunt KAD, MBG



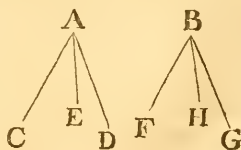
MBG anguli, ut et AKD, BMG, uterque enim eſt rectus; ſuntque latera AK, BM quae aequalibus angulis adjacent inter ſe aequalia; erit KD quidem aequalis ipſi MG, AD vero ipſi BG[b]. eadem ratione, in triangulis KAL, MBN, erit KL aequalis MN, AL vero ipſi BN. in triangulis autem LAD, NBG duae LA, AD duabus NB, BG aequales oſtenſae ſunt, altera alteri, et aequales continent angulos; baſis igitur LD baſi NG eſt aequalis[c]. Denique in triangulis KLD, MNG, duae DK, KL duabus GM, MN ſunt aequales, et eſt baſis LD aequalis baſi NG; angulus igitur DKL aequalis eſt angulo GMN[d]. eſt vero angulus DKL inclinatio plani CAD ad planum CAE, et angulus GMN inclinatio plani FBG ad ipſum FBH, quae propterea plana ad ſe invicem ſunt ſimiliter inclinata[e]. et eadem ratione reliqua plana in quibus ſunt aequales anguli ad ſe invicem ſimiliter inclinata oſtendentur. Si igitur ſint duo anguli ſolidi &c. Q. E. D.

b. 26. 1.
c. 4. 1.
d. 8. 1.
e. 7. Def. 11.

PROP. B. THEOR.

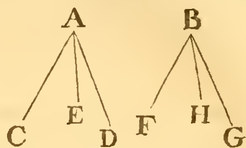
SI ſint duo anguli ſolidi, quorum uterque continetur tribus planis angulis qui inter ſe ſunt aequales, ſinguli ſingulis, et ſimiliter poſiti; erunt anguli ſolidi inter ſe aequales.

Sint anguli ſolidi ad puncta A, B; et contineatur angulus A tribus planis angulis CAD, CAE, EAD; angulus vero B contineatur tribus FBG, FBH, HBG; quorum CAD aequalis eſt ipſi FBG; CAE ipſi FBH; et EAD ipſi HBG. erit ſolidus angulus ad A ſolido angulo ad B aequalis.



Applicato enim ſolido angulo ad A, ſolido angulo ad B; et pri-

mum applicato plano angulo CAD ipſi FBG, puncto quidem A poſito in B, rectâ vero linea AC in ipſa BF; recta AD congruet rectae BG, quod angulus CAD aequalis ſit angulo FBG. quoniam vero inclinatio plani CAE ad planum CAD aequalis eſt inclinationi

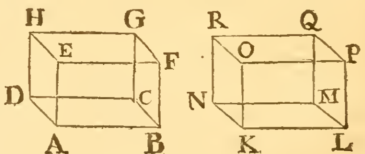


a. A. 11. plani FBH ad planum FBG[a], et congruit planum CAD plano FBG, congruet et planum CAE plano FBH; ac propterea recta linea AE congruet ipſi BH, quia ſcilicet angulus CAE eſt aequalis angulo FBH. et oſtenſa eſt recta AD congruere ipſi BG; quare planum EAD congruit plano HBG. Ergo ſolidus angulus ad A congruit ſolido angulo ad B, et in-
b. 8. Ax. 1. ter ſe ſunt aequales[b]. Q. E. D.

PROP. C. THEOR.

SOLIDAE figurae quae continentur planis ſimilibus, multitudine et magnitudine aequalibus, et ſimiliter poſitis, quarumque nullus angulus ſolidus pluribus quam tribus planis angulis continetur, ſunt inter ſe aequales et ſimiles.

Sint AG, KQ figurae ſolidae quae continentur planis ſimilibus, multitudine et magnitudine aequalibus, et ſimiliter poſitis; ſitque planum AC ſimile et aequale plano KM; planum AF ipſi KP; BG ipſi LQ; GD ipſi QN; DE ipſi NO; et FH denique ſimile et aequale ipſi PR. Erit figura ſolida AG aequalis et ſimilis ipſi KQ.



Quoniam

Quoniam angulus ſolidus ad A continetur tribus angulis planis BAD, BAE. EAD, qui, ſinguli ſingulis, ex hypotheſi aequales ſunt planis angulis LKN, LKO, OKN quibus continetur angulus ſolidus ad K; erit angulus ſolidus ad A angulo ſolido ad K aequalis[a]. ſimiliter a. B. 11. reliqui figurarum anguli ſolidi inter ſe aequales oſtendentur. applicatâ igitur figurâ ſolida AG figurae ſolidae KQ, et primum applicatâ figura plana AC figurae planae KM, poſitâ ſcilicet recta AB in ipſa KL, congruet figura AC figurae KM, quod ipſae ſint aequales et ſimiles. congruent igitur rectae AD, DC, CB ipſis KN, NM, ML, ſingulae ſingulis; et puncta A, D, C, B punctis K, N, M, L, angulus autem ſolidus ad A congruet angulo ſolido ad K[a], quare et planum AF congruet plano KP, et figura AF figurae KP, quia ſunt inter ſe aequales et ſimiles. congruent igitur rectae AE, EF, FB rectis KO, OP, PL; et puncta E, F ipſis O, P. ſimiliter oſtendetur figura AH congruere ipſi KR, recta DH rectae NR, et punctum H puncto R. et quoniam ſolidus angulus ad B aequalis eſt ſolido angulo ad L, ſimiliter oſtendetur figura BG congruere figurae LQ, et recta CG rectae MQ, punctumque G puncto Q. Quoniam igitur plana, et latera omnia figurae ſolidae AG congruunt planis et lateribus figurae ſolidae KQ, erit AG aequalis et ſimilis ipſi KQ. Et ſimiliter aliae figurae ſolidae quaecunque quae continentur planis ſimilibus, multitudine et magnitudine aequalibus, et ſimiliter poſitis, quarumque nullus angulus ſolidus continetur pluribus quam tribus angulis planis, aequales et ſimiles inter ſe oſtendentur. Q. E. D.

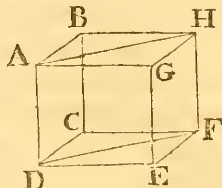
PROP. XXIV. THEOR.

SI ſolidum ſex parallelis planis contineatur, oppoſita ipſius plana, parallelogramma erunt ſimilia et aequalia.

Solidum

Solidum enim CDGH parallelis planis AC, GF; BG, CE; FB, AE, contineatur. Dico oppoſita ejus plana, parallelogramma eſſe ſimilia et aequalia.

Quoniam enim duo plana parallela BG, CE a plano AC ſecantur,
a. 16. 11. communes ipſorum ſectiones parallelae ſunt[a]; ergo AB ipſi CD eſt parallela. rurſus, quoniam duo plana BF, AE ſecantur a plano AC, communes ipſorum ſectiones parallelae ſunt[a], parallela igitur eſt AD ipſi BC. oſtenſa autem eſt AB parallela CD; ergo AC parallelogrammum erit. ſimiliter demonſtrabimus, et unumquodque ipſorum CE, FG, GB, BF, AE parallelogrammum eſſe. jungantur AH, DF; et quoniam parallela eſt AB quidem ipſi DC, BH vero ipſi CF; erunt duae rectae lineae AB, BH ſeſe tangentes duabus DC, CF ſeſe tangentibus parallelae, et non in eodem plano; quare aequales angulos con-
b. 10. 11. tinebunt[b]. angulus igitur ABH angulo DCF eſt aequalis. et quoniam duae AB, BH duabus DC, CF aequales ſunt, et angulus ABH aequalis angulo DCF, erit baſis AH baſi DF aequalis, et ABH triangulum
c. 4. 1. aequale triangulo DCF[c]. et eſt ipſius quidem ABH trianguli duplum[d]
d. 34. 1. BG parallelogrammum; ipſius vero DCF trianguli duplum parallelogrammum CE; erit igitur BG parallelogrammum aequale et ſimile parallelogrammo CE. ſimiliter demonſtrabimus, et AC parallelogrammum parallelogrammo GF, et parallelogrammum AE parallelogrammo BF aequale eſſe et ſimile. Si igitur ſolidum &c. Q. E. D.



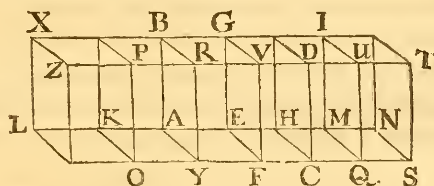
PROP. XXV. THEOR.

SI ſolidum parallelepipedum plano ſecetur oppoſitis planis parallelo, erit ut baſis ad baſim, ita ſolidum ad ſolidum.

Solidum

Solidum enim parallelepipedum ABCD, plano EV secetur oppositis planis AR, HD parallelo. Dico ut basis AEFY ad basim EHCF, ita esse ABFV solidum ad solidum EGCD.

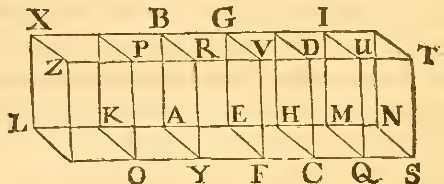
Producatur enim AH ex utraque parte; et ponantur ipsi quidem EH aequales quotcunque HM, MN; ipsi vero EA aequales quotcunque AK, KL, et compleantur parallelogramma LO, KY, HQ, MS, et solida LP, KR, HU, MT. quoniam igitur aequales inter se sunt LK, KA, AE rectae lineae, erunt et parallelogramma LO, KY, AF inter se aequalia[a]; itemque aequalia inter se parallelogramma KX, a. 36. 1. KB, AG, et adhuc parallelogramma LZ, KP, AR inter se aequalia[b]; opposita enim sunt. eadem ratione et parallelogramma [a] b. 24. 11. EC, HQ, MS sunt aequalia inter se; itemque parallelogramma



[a] HG, HI, IN inter se aequalia; et insuper parallelogramma [b] HD, MU, NT. tria igitur plana solidi LP aequalia et similia sunt tribus planis solidi KR, atque etiam solidi AV. sed tria tribus oppositis sunt aequalia et similia[b], et nullus ex ipsorum angulis solidis continetur pluribus quam tribus angulis planis. Ergo tria solida LP, KR, AV inter se aequalia erunt[c]. eadem ratione et tria solida ED, HU, MT sunt aequalia inter se. c. C. 11. quam multiplex igitur est basis LF ipsius AF basis, tam multiplex est et LV solidum solidi AV. eadem ratione quam multiplex est NF basis ipsius basis HF, tam multiplex est et solidum NV ipsius ED solidi. et si basis LF est aequalis basi NF, et solidum LV solido

NV

c. C. 11. NV aequale erit[c]; et ſi baſis LF ſuperat NF baſim, et ſolidum LV ſolidum NV ſuperabit; et ſi minor, minus. quatuor igitur magnitudinibus exiſtentibus, duabus ſcilicet baſibus AF, FH, et duobus ſolidis AV, ED; baſis quidem AF et AV ſolidi ſumpta ſunt utcunque aeque multiplicia, videlicet baſis LF et ſolidum LV; baſis vero FH et ED ſolidi



ſumpta ſunt alia utcunque aeque multiplicia, nempe baſis FN et ſolidum NV. et demonſtratum eſt ſi baſis LF ſuperat baſim FN et LV ſolidum ſolidum NV ſuperare; et ſi aequalis, aequale; et ſi minor, minus. eſt igitur ut AF baſis ad baſim FH, ita AV ſolidum ad ſolidum ED. Quare ſi ſolidum &c. Q. E. D.

PROP. XXVI. PROB.

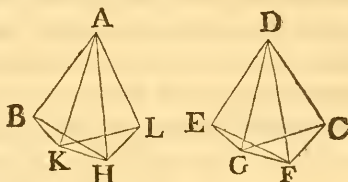
AD datam rectam lineam, et ad datum in ipſa punctum dato angulo ſolido tribus planis angulis contento, aequalem angulum ſolidum conſtituere.

Sit data quaedam recta linea AB, datum autem in ipſa punctum A, et datus ſolidus angulus ad D qui angulis planis EDC, EDF, FDC continetur. oportet ad datam rectam lineam AB, et ad datum in ipſa punctum A, dato angulo ſolido ad D aequalem angulum ſolidum conſtituere.

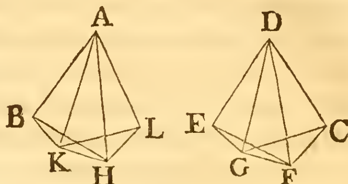
Sumatur enim in recta linea DF quodvis punctum F, a quo ad planum

planum per ED, DC transiens ducatur perpendicularis FG[a], et plano a. 11. 11.
in puncto G occurrat; jungaturque DG, et ad rectam lineam AB, et ad datum in ipsa punctum A, angulo quidem EDC aequalis angulus constituatur BAL; angulo autem EDG constituatur aequalis BAK[b]. b. 23. 1.
deinde ipsi DG ponatur aequalis AK, et a puncto K plano BAL ad rectos angulos erigatur KH[c]; ponaturque ipsi GF aequalis KH, et c. 12. 11.
HA jungatur. Dico angulum solidum ad A qui angulis planis BAL, BAH, HAL continetur, aequalem esse angulo solido ad D, planis angulis EDC, EDF, FDC contento.

Sumantur enim aequales rectae lineae AB, DE, et jungantur HB, KB, FE, GE. Quoniam igitur FG perpendicularis est ad subjectum planum, et ad omnes rectas lineas quae ipsam tangunt, et in subjecto sunt plano, rectos faciet angulos[d]. d. 3. Def. 11.
uterque igitur angulorum FGD, FGE rectus est. eadem ratione, et uterque ipsorum HKA, HKB est rectus. et quoniam duae KA, AB duabus GD, DE aequales sunt, altera alteri, et angulos aequales continent, erit basis BK basi EG aequalis[e]. est autem et KH aequalis GF, e. 4. 1.
atque angulos rectos continent; aequalis igitur erit HB ipsi FE[e]. rursus, quoniam duae AK, KH duabus DG, GF aequales sunt, et rectos continent angulos; erit basis AH basi DF aequalis; estque AB aequalis DE; duae igitur HA, AB duabus FD, DE sunt aequales, et basis HB est aequalis basi FE; ergo angulus BAH angulo EDF aequalis erit[f]. eadem ratione, et angulus HAL angulo FDC est aequalis. quan- f. 8. 1.
doquidem si assumamus aequales AL, DC, et jungamus KL, HL, GC, FC, quoniam totus angulus BAL est aequalis toti EDC, quorum BAK ipsi EDG ponitur aequalis; erit reliquus KAL aequalis reliquo GDC.



et quoniam duae KA, AL duabus GD, DC aequales ſunt, et angulos
e. 4. 1. aequales continent, baſis KL baſi GC aequalis erit[e]. eſt autem et KH aequalis GF, duae igitur LK, KH duabus CG, GF ſunt aequales; anguloſque rectos continent; ergo baſis HL aequalis eſt baſi FC. rurſus, quoniam duae HA, AL duabus FD, DC aequales ſunt, et baſis HL aequalis baſi FC, erit angulus HAL aequalis angulo
f. 8. 1. FDC[f]. quoniam igitur tres anguli plani BAL, BAH, HAL quibus continetur angulus ſolidus ad A, aequales ſunt tribus angulis planis EDC, EDF, FDC quibus angulus ſolidus ad D continetur, ſinguli ſingulis, et ſimiliter ſunt poſiti; erit
g. B. 11. ſolidus angulus ad A angulo ſolido ad D aequalis[g]. Ad datam igitur rectam lineam, et ad datum in ipſa punctum dato angulo ſolido tribus planis angulis contento aequalis angulus ſolidus conſtitutus eſt. Q. E. F.



PROP. XXVII. PROB.

A Data recta linea dato ſolido parallelepipedo ſimile, et ſimiliter poſitum ſolidum parallelepipedum deſcribere.

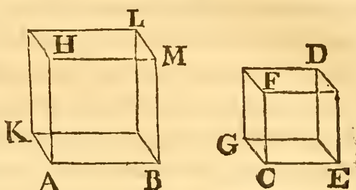
Sit recta quidem linea AB, datum vero ſolidum parallelepipedum CD. oportet a data recta linea AB dato ſolido parallelepipedo CD ſimile, et ſimiliter poſitum ſolidum parallelepipedum deſcribere.

Conſtituatur enim ad rectam lineam AB, et ad datum in ipſa punc-
a. 26. 11. tum A angulo ſolido ad C aequalis angulus[a] qui planis angulis BAK, KAH, HAB, contineatur, ita ut angulus quidem BAK aequalis ſit angulo ECG, angulus vero KAH angulo GCF, et adhuc angulus HAB

angulo

angulo FCE; et fiat ut EC ad CG, ita BA ad AK, ut autem GC ad CF, ita KA ad AH[b]; ergo ex aequali ut EC ad CF, ita erit BA ad AH[c]. compleatur parallelogrammum BH, et AL ſolidum. quoniam igitur eſt ut EC ad CG, ita BA ad AK, circa aequales angulos ECG, BAK latera ſunt proportionalia; ſimile igitur eſt parallelogrammum BK parallelogrammo EG. eadem quoque ratione parallelogrammum KH ſimile eſt parallelogrammo GF, et parallelogrammum HB parallelogrammo FE. tria igitur parallelogramma ſolidi AL tribus parallelogrammis ſolidi CD ſimilia ſunt; ſed tria tribus oppoſitis ſunt ſimilia et aequalia[d]. et quoniam anguli plani quibus continentur ſolidorum anguli ſolidi, ſunt inter ſe aequales et ſimiliter poſiti, erunt et anguli ſolidi inter ſe aequales[e]. Ergo AL ſolidum ſolido CD ſimile [f] erit. A data igitur recta linea AB dato ſolido parallelepipedo CD, ſolidum parallelepipedum AL ſimile, et ſimiliter poſitum deſcriptum eſt. Q. E. F.

b. 12. 6.
c. 22. 5.
d. 24. 11.
e. B. 11.
f. 11. Def. 11.



PROP. XXVIII. THEOR.

SI ſolidum parallepipedum plano ſecetur per diagonales oppoſitorum planorum, ab ipſo plano bifariam ſecabitur.

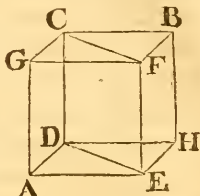
Sit enim ſolidum parallelepipedum AB, et oppoſitorum planorum AH, GB diagonales ſint DE, CF quae ſc. ductae ſunt inter aequales angulos parallelogrammorum AH, GB. et quoniam utraque CD, FE parallela eſt ipſi GA, non in eodem cum ipſa plano, erunt CD, FE inter ſe parallelae[a]; quare diagonales CF, DE ſunt in plano in quo

a. 9. 11.

 ſunt

b. 16. 11. ſunt hae parallelae; et inter ſe parallelae erunt[b]. Dico igitur ſolidum AB a plano CDEF bifariam ſecari.

Quoniam enim aequale eſt CGF triangulum triangulo CBF, trian-
c. 34. 1. gulum vero DAE triangulo DHE[c]; eſt autem et CA parallelogram-
d. 24. 11. mum parallelogrammo BE aequale[d], oppoſitum enim eſt; et parallelogrammum GE parallelogrammo CH: erit priſma contentum duobus triangulis CGF, DAE, et tribus parallelogrammis CA, GE, EC aequale priſmati quod continetur duobus triangulis CBF, DHE, et tribus paralle-
e. C. 11. logrammis BE, CH, EC[e]; etenim planis ſimilibus, multitudine et magnitudine aequalibus, et ſimiliter poſitis continentur, et nullus ex ipſorum angulis ſolidis continetur pluribus quam tribus angulis planis. Ergo totum AB ſolidum a plano CDEF bifariam ſecatur. Q. E. D.

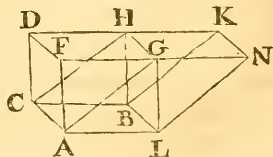


PROP. XXIX. THEOR.

SOLIDA parallelepipeda quae in eadem ſunt baſi, et eadem altitudine, quorum inſiſtentes rectae ſunt in eiſdem rectis lineis, inter ſe ſunt aequales.

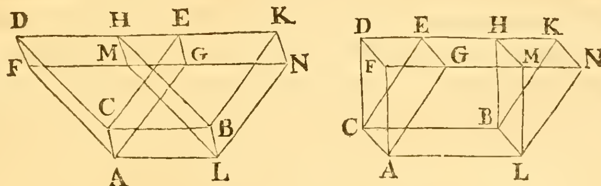
Vid. Fig. 2, 3. Sint enim in eadem baſi AB ſolida parallelepipeda AH, AK, eadem altitudine, quorum inſiſtentes rectae AF, AG, LM, LN; CD, CE, BH, BK ſint in eiſdem rectis lineis FN, DK. Dico ſolidum AH ſolido AK aequale eſſe.

Vid. Fig. 1. Primo habeant parallelogramma DG, HN baſi AB oppoſita, latus commune HG. quoniam igitur ſolidum AH ſectum eſt plano AGHC per diagonales



gonales AG, CH oppositorum planorum ALGF, CBHD, bifariam secabitur AH a plano AGHC[a]. duplum igitur est solidum AH prismatis a. 28. 11.
quod triangulis ALG, CBH continetur. eadem ratione, quoniam solidum AK sectum est plano LGHB per diagonales LG, BH oppositorum planorum ALNG, CBKH, erit solidum AK duplum ejusdem prismatis quod triangulis ALG, CBH continetur. solidum igitur AH solido AK est aequale.

Non autem habeant parallelogramma basi opposita videlicet DM, EN latus commune. quoniam igitur parallelogrammum est utrumque ipsorum CH, CK, erit CB utrique rectarum DH, EK aequalis[b]; ergo b. 34. 1.
et DH est aequalis EK. communis addatur, aut auferatur HE; erit



igitur DE aequalis HK. quare et CDE triangulum triangulo BHK est aequale[c]. parallelogrammum autem DG est aequale parallelogram- c. 38. 1.
mo HN[d]. eadem ratione et AFG triangulum est aequale triangulo d. 36. 1.
LMN. et est parallelogrammum quidem CF aequale parallelogrammo BM, parallelogrammum vero CG parallelogrammo BN[e]; opposita enim e. 24. 11.
sunt. Ergo et prisma contentum duobus triangulis AFG, CDE, et tribus parallelogrammis AD, DG, GC est aequale[f] prismati quod duo- f. C. 11.
bus triangulis LMN, BHK et tribus parallelogrammis BM, MK, KL continetur. ablato igitur prismate LMN, BHK ex solido cujus basis est parallelogrammum AB, oppositum autem ipsi, FDKN; et ex eodem solido

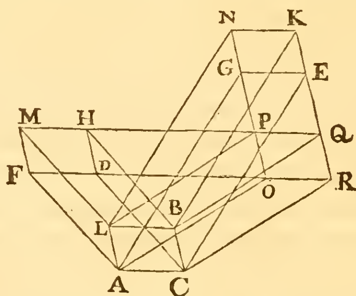
ſolido ablato priſmate AFG, CDE; erit reliquum ſolidum, parallelepipedum ſc. AH aequale reliquo ſolido, parallelepipedo ſc. AK. ſolida igitur parallelepipeda &c. Q. E. D.

PROP. XXX. THEOR.

SOLIDA parallelepipeda quae in eadem ſunt baſi, et eadem altitudine, quorum inſiſtentes rectae non ſunt in eiſdem rectis lineis, inter ſe ſunt aequalia.

Sint enim in eadem baſi AB ſolida parallelepipeda CM, CN, et eadem altitudine, quorum inſiſtentes rectae AF, AG, LM, LN, CD, CE, BH, BK, non ſunt in eiſdem rectis lineis. Dico ſolidum CM, ſolido CN aequale eſſe.

Producantur enim FD, MH et NG, KE, et conveniant inter ſe in punctis O, P, Q, R; et AO, LP, BQ, CR jungantur. quoniam



igitur planum LBHM parallelum eſt plano oppoſito ACDF, et planum quidem LBHM illud eſt in quo ſunt parallelae rectae LB, MHPQ, in quo etiam eſt figura BLPQ; planum vero ACDF eſt illud in quo ſunt parallelae AC, FDOR, in quo etiam eſt figura CAOR; erunt figurae BLPQ,

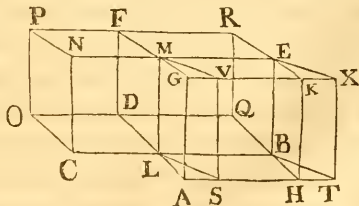
BLPQ, CAOR in planis inter se parallelis. similiter quoniam planum ALNG opposito plano CBKE parallelum est, et planum quidem ALNG illud est in quo sunt parallelae AL, OPGN, in quo etiam est figura ALPO; planum vero CBKE est illud in quo sunt parallelae CB, RQEK, in quo etiam est figura CBQR; erunt figurae ALPO, CBQR in planis inter se parallelis. et sunt plana ACBL, ORQP inter se parallela; solidum igitur CP est parallelepipedum. solidum autem CM cujus basis ACBL, et parallelogrammum ipsi oppositum FDHM, aequale est [a] solido CP cujus basis est parallelogrammum ACBL, et ei oppositum ORQP; in eadem enim sunt basi, et ipsorum insistentes rectae AF, AO, CD, CR; LM, LP, BH, BQ sunt in eisdem rectis lineis FR, MQ. sed solidum CP est aequale [a] solido CN, etenim in eadem sunt basi ACBL, et eorum insistentes rectae AO, AG, LP, LN; CR, CE, BQ, BK sunt in eisdem rectis lineis ON, RK. Ergo solidum CM, solido CN aequale erit. Solida igitur parallelepipeda &c. Q. E. D.

a. 29. 11.

PROP. XXXI. THEOR.

SOLIDA parallelepipeda quae in aequalibus sunt basibus, et eadem altitudine, inter se sunt aequalia.

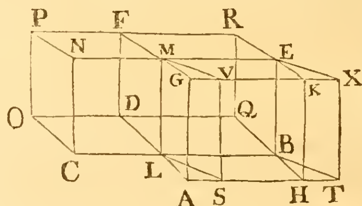
Sint in aequalibus basibus AB, CD solida parallelepipeda AE, CF, et eadem altitudine. Dico solidum AE solido CF aequale esse.



Sint primo insistentes rectae lineae ad rectos angulos basibus AB, CD. ponantur autem solida ita ut bases sint in eodem plano, et ut in directum sint latera

CL,

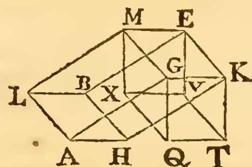
CL, LB; recta igitur LM quae inſiſtit puncto L communis erit ſoli-
a. 13. 11. dis AE, CF [a]; reliquae autem inſiſtentes rectae ſint AG, HK, BE; DF,
OP, CN. et primo ſit angulus ALB aequalis angulo CLD; in direc-
tum igitur erunt AL, LD. producantur OD, HB et conveniant in Q,
et compleatur ſolidum parallelepipedum LR cujus baſis eſt parallelogram-
mum LQ, et LM una ex inſiſtentibus rectis. quoniam igitur AB pa-
rallelogrammum parallelogrammo CD eſt aequale, erit ut baſis AB ad
b. 7. 5. baſim LQ, ita baſis CD ad eandem LQ [b]. et quoniam ſolidum pa-
rallelepipedum AR ſectum eſt plano LMEB oppoſitis planis AK, DR
parallelo, erit ut AB baſis ad baſim LQ, ita ſolidum AE ad ſolidum
c. 25. 11. LR [c]. eadem ratione quoniam ſolidum parallelepipedum CR ſectum eſt
plano LF parallelo planis oppoſitis CP, BR, ut baſis CD ad baſim
LQ, ita erit ſolidum CF ad ſolidum LR. ſed ut baſis AB ad baſim
LQ, ita oſtenſa fuit baſis CD ad LQ baſim. ut igitur ſolidum AE
ad LR ſolidum, ita ſolidum CF
ad ſolidum LR. eſt igitur ſoli-
d. 9. 5. dum AE ſolido CF aequale [d].

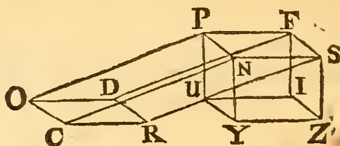


Sed ſint in aequalibus baſibus
SB, CD ſolida parallelepipeda SE,
CF, et eadem altitudine, ſintque
rectae inſiſtentes ad rectos angu-
los baſibus; poſitiſque baſibus SB, CD in eodem plano, ita ut in di-
rectum ſint CL, LB, non ſit angulus SLB aequalis angulo CLD; erit
ſolidum SE aequale ſolido CF. producantur DL, TS et conveniant
in A, et per B ducatur ipſi DA parallela BH; productae vero HB, OD
in Q conveniant; et compleantur ſolida AE, LR. ſolidum igitur AE
cujus baſis eſt LE parallelogrammum, et oppoſitum ipſi AK, aequale
e. 29. 11. eſt ſolido SE cujus baſis eſt LE et oppoſitum ipſi SX [e]; in eadem enim
ſunt baſi LE, et eadem altitudine, et eorum inſiſtentes rectae lineae vi-
delicet

delicet LA, LS, BH, BT; MG, MV, EK, EX in eisdem sunt rectis lineis AT, GX. quoniam vero parallelogrammum AB aequale est ipsi SB[f], etenim in eadem sunt basi LB, et in eisdem parallelis LB, AT; f. 35. 1.
est autem basis SB aequale basi CD; erit basis AB basi CD aequalis. et est angulus ALB angulo CLD aequalis; erit igitur, ex prius ostensis, solidum AE aequale solido CF. solidum autem AE aequale ostensum est solido SE. Ergo et solidum SE solido CF est aequale.

Sed non sint insistentes rectae AG, HK, BE, LM; CN, RS, DF, OP ad rectos angulos ipsis AB, CD basibus. Dico rursus solidum AE aequale esse solido CF. ducantur[g] a punctis G, K, E, M; N, S, F, P; g. 11. 11.
ad subjectum planum perpendiculares GQ, KT, EV, MX; NY, SZ, FI, PU; et plano in punctis Q, T, V, X; Y, Z, I, U, occurrant, et jungantur QT, TV, VX, XQ; YZ, ZI, IU, UY. Quoniam igi-





tur GQ, KT ad rectos sunt angulos eidem plano, erunt ipsae inter se parallelae[h]. et parallelae sunt MG, EK; plana igitur MQ, ET h. 6. 11.
quorum unum transit per MG, GQ, et alterum per EK, KT quae ipsis parallelae sunt et non in eodem plano, sunt inter se parallela[i]. ea- i. 15. 11
dem ratione, et plana MV, GT inter se parallela sunt. solidum igitur QE est parallelepipedum. similiter ostendetur solidum YF parallelepipedum esse. est autem, ex praemissis, solidum EQ aequale solido FY, in aequalibus enim sunt basibus MK, PS, et eadem altitudine, et eorum rectae insistentes ad rectos angulos sunt basibus. sed EQ solidum solido AE est aequale[k]; solidum vero FY aequale est solido CF[k]. si- k. 29. aut 30. 11.

 quidem

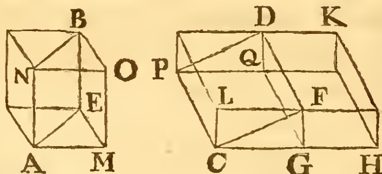
quidem in eadem ſunt baſi, et eadem altitudine. Ergo et ſolidum AE ſolido CF aequale erit. Solida igitur parallelepipeda &c. Q. E. D.

PROP. XXXII. THEOR.

SOLIDA parallelepipeda quae eandem habent altitudinem, inter ſe ſunt ut baſes.

Sint ſolida parallelepipeda AB, CD quae eandem altitudinem habeant. Dico inter ſe eſſe ut baſes, hoc eſt ut AE baſis ad baſim CF, ita ſolidum AB ad CD ſolidum.

Applicetur enim ad rectam lineam FG parallelogrammo AE aequale FH, ita ut angulus FGH aequalis ſit angulo
a. Cor. 45. 1. LCG[a]; et compleatur ſolidum parallelepipedum GK cujus baſis ſit FH, et una ex rectis inſiſtentibus ſit FD.



b. 31. 11. ſolidum igitur AB ſolido GK eſt aequale[b], in aequalibus enim ſunt baſibus AE, FH, et eadem altitudine. itaque quoniam ſolidum parallelepipedum CK plano DG ſecatur oppoſitis planis parallelo, erit ut HF
a. 25. 11. baſis ad baſim FC, ita ſolidum HD ad DC ſolidum[c]. atque eſt baſis quidem FH baſi AE aequalis, ſolidum vero GK aequale ſolido AB. eſt igitur et ut AE baſis ad CF, ita ſolidum AB ad ſolidum CD. Quare ſolida parallelepipeda &c. Q. E. D.

COR. Hinc priſmata quorum baſes ſunt triangula, et quae eandem habent altitudinem, ſunt inter ſe ut baſes.

Habeant enim priſmata quorum baſes ſunt triangula AEM, CFG, ipſiſque oppoſita NBO, PDQ eandem altitudinem; et compleantur parallelogramma AE, CF, et ſolida parallelepipeda AB, CD, in quorum primo

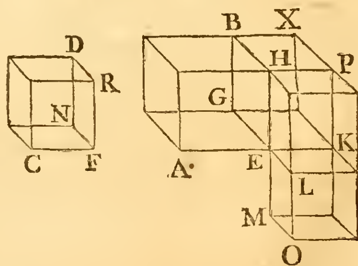
primo ſit MO una ex rectis inſiſtentibus, GQ vero in altero. Quoniam igitur ſolida parallelepipeda AB, CD eandem habent altitudinem, erunt ea inter ſe ut baſis AE ad baſim CF; quare priſmata quae ipſorum ſunt dimidia [d] ſunt inter ſe ut baſis AE ad CF baſim, hoc eſt ut triangulum AEM ad triangulum CFG. d. 28. 11.

PROP. XXXIII. THEOR.

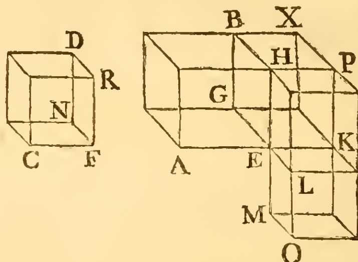
SIMILIA ſolida parallelepipeda inter ſe ſunt in triplicata ratione homologorum laterum.

Sint ſimilia ſolida parallelepipeda AB, CD; latus autem AE homologum ſit lateri CF. Dico ſolidum AB ad CD ſolidum triplicatam rationem habere ejus quam habet AE ad CF.

Producantur enim EK, EL, EM in directum ipſis AE, GE, HE; et ipſi quidem CF aequalis ponatur EK, ipſi vero FN aequalis EL; et adhuc ipſi FR aequalis EM; et KL parallelogrammum, et KO ſolidum compleantur. quoniam igitur duae KE, EL duabus CF, FN aequales ſunt; ſed et angulus KEL angulo CFN eſt aequalis, quia et angulus AEG ipſi CFN aequalis eſt ob ſimilitudinem ſolidorum AB, CD; erit et KL parallelogrammum ſimile et aequale parallelogrammo CN. eadem ratione et parallelogrammum MK aequale eſt et ſimile parallelogrammo CR, et adhuc parallelogrammum OE ipſi FD parallelogrammo. tria igitur parallelogramma ſolidi KO tribus parallelogrammis



lelogrammis ſolidi CD aequalia et ſimilia ſunt. ſed tria tribus op-
a. 24. 11. poſitis aequalia ſunt et ſimilia[a]. ſolidum igitur KO aequale eſt et ſi-
b. C. 11. mile ſolido CD[b]. compleatur GK parallelogrammum, et a baſibus quidem GK, KL parallelogrammis, altitudine vero eadem cum ipſo AB, ſolida compleantur EX, LP ita ſcilicet ut recta EH ſit una ex earum rectis inſiſtentibus. et quoniam ob ſimilitudinem ſolidorum AB, CD, et permutando, eſt ut AE ad CF, ita EG ad FN, et EH ad FR; aequalis autem FC ipſi EK, et FN ipſi EL, et FR ipſi EM; erit igitur ut AE ad EK, ita EG ad EL, et HE ad EM. ſed ut AE quidem ad
c. 1. 6. EK, ita [c] AG parallelogrammum ad parallelogrammum GK; ut autem GE ad EL, ita GK ad KL; et ut HE ad EM, ita PE ad KM. et ut igitur AG parallelogrammum ad parallelogrammum GK, ita GK ad KL, et PE ad KM. ſed ut AG quidem ad GK, ita AB ſoli-
d. 25. 11. dum ad ſolidum EX[d]; ut autem GK ad KL, ita ſolidum EX ad PL ſolidum; et ut PE ad KM, ita PL ſolidum ad ſolidum KO. et ut igitur ſolidum AB ad ſolidum EX, ita EX ad PL, et PL ad KO. ſi autem ſint quatuor magnitudines deinceps proportionales, prima ad quartam triplicatam rationem habere dicitur ejus quam habet ad ſecundam. ergo et AB ſolidum ad ſolidum KO triplicatam habet rationem ejus, quam AB ad EX. ſed ut AB ad EX, ita AG parallelogrammum ad parallelogrammum GK, et AE recta linea ad ipſam EK. quare et AB ſolidum ad ſolidum KO triplicatam rationem habebit ejus, quam AE habet ad EK. aequale autem eſt ſolidum KO ſolido CD, et recta linea EK rectae CF eſt aequalis. Ergo et AB ſolidum ad ſolidum CD triplicatam habet



bet

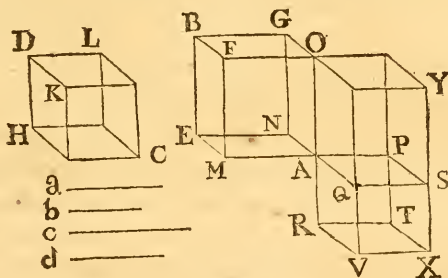
bet rationem ejus, quam ipſius latus homologum AE habet ad homologum latus CF. Q. E. D.

Cor. Ex hoc manifeſtum eſt, ſi quatuor rectae lineae proportionales fuerint, ut prima ad quartam, ita eſſe ſolidum parallelepipedum quod ſit à prima ad ſolidum quod à ſecunda, ſimile et ſimiliter deſcriptum; quoniam et prima ad quartam triplicatam rationem habet ejus quam prima ad ſecundam [e]. e. 11. Def. 5.

PROP. D. THEOR.

Solida parallelepipeda quae continentur parallelogrammis quae inter ſe ſunt aequiangula, ſingula ſingulis, hoc eſt quorum anguli ſolidi ſunt inter ſe aequales; habent rationem inter ſe eandem ei quae compoſita eſt ex laterum rationibus.

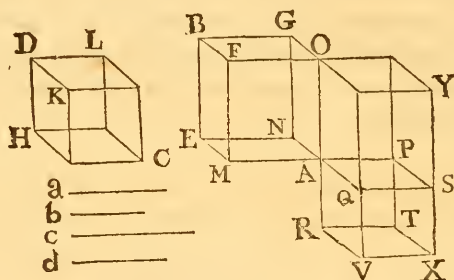
Sint ſolida parallelepipeda AB, CD, quorum AB continetur parallelogrammis AE, AF, AG, quae aequiangula ſunt, ſingula ſingulis, pa-



rallelogrammis CH, CK, CL quibus continetur ſolidum CD. erit ratio quam habet ſolidum AB ad ſolidum CD eadem ei quae compoſita eſt

ex

ex rationibus laterum AM ad DL, AN ad DK, et AO ad DH. producantur enim MA, NA, OA ad P, Q, R, ita ut AP aequalis ſit ipſi DL, AQ ipſi DK, et AR ipſi DH; et compleatur ſolidum parallelepipedum AX contentum ſc. parallelogrammis AS, AT, AV ipſis CH, CK, CL ſimilibus et aequalibus, ſingula ſingulis. ſolidum igitur AX
a. C. 11. ſolido CD eſt aequale[a]. compleatur etiam ſolidum AY cujus baſis eſt AS, una vero ex rectis inſiſtentibus eſt AO. exponatur autem recta quaevis a, et ut MA ad AP, ita fiat a ad rectam b; ut vero NA ad AQ, ita fiat b ad c; et ut OA ad AR, ita fiat c ad d. quoniam igi-



tur AE parallelogrammum aequiangulum eſt ipſi AS, erit AE ad AS, ut recta a ad ipſam c; hoc enim in 23. 6. oſtenſum eſt. ſolida vero AB, AY quae inter plana parallela BOY, EAS conſtituuntur, eadem ſunt altitudine. eſt igitur ſolidum AB ad ſolidum AY, ut baſis AE ad
b. 32. 11. baſim AS[b], hoc eſt ut recta a ad rectam c. ſolidum vero AY eſt ad
c. 25. 11. ſolidum AX, ut baſis OQ ad baſim QR[c], hoc eſt ut recta OA ad ipſam AR, hoc eſt ut recta c ad ipſam d. quoniam igitur ſolidum AB eſt ad ſolidum AY, ut recta a ad rectam c; ut vero ſolidum AY ad ſolidum AX, ita eſt recta c ad ipſam d; erit ex aequali ſolidum AB ad ſolidum AX ſive CD, ut recta a ad rectam d. ratio autem a ad d

compoſita

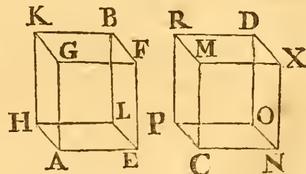
compoſita dicitur [d] ex rationibus a ad b, b ad c, et c ad d, quae eadem ſunt, ſingulae ſingulis, rationibus laterum MA ad AP, NA ad AQ, et OA ad AR. latera autem AP, AQ, AR, aequalia ſunt lateribus DL, DK, DH, ſingula ſingulis. Ergo ſolidum AB habet ad ſolidum CD rationem eandem ei quae compoſita eſt ex rationibus laterum AM ad DL, AN ad DK, et AO ad DH. Q. E. D. d. A. Def. 5.

PROP. XXXIV. THEOR.

AEQUALIUM ſolidorum parallelepipedorum baſes ſunt reciproce proportionales altitudinibus; et quorum ſolidorum parallepipedorum baſes ſunt reciproce proportionales altitudinibus, ea inter ſe ſunt aequalia.

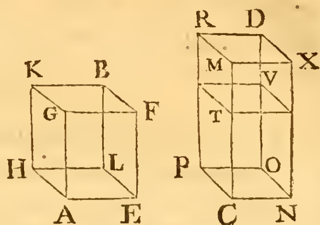
Sint aequalia ſolida parallelepipeda AB, CD; dico ipſorum baſes eſſe reciproce proportionales altitudinibus; hoc eſt ut EH baſis ad baſim NP, ita eſſe altitudinem ſolidi CD ad ſolidi AB altitudinem.

Sint enim primum inſiſtentes AG, EF, LB, HK; CM, NX, OD, PR ad rectos angulos baſibus ipſorum. Dico ut EH baſis ad baſim NP, ita eſſe CM ad AG. ſi igitur baſis EH baſi NP ſit aequalis, quoniam et AB ſolidum aequale eſt ſolido CD, erit et CM aequalis ipſi AG. ſi enim baſibus EH, NP aequalibus exiſtentibus non ſint AG, CM altitudines aequales, neque AB ſolidum ſolido CD aequale erit. ponitur autem aequale. non igitur inaequalis eſt altitudo CM altitudini AG; igitur eſt aequalis; ac propterea ut EH baſis ad baſim NP, ita erit CM ad AG.



At vero non ſit baſis EH aequalis baſi NP, ſed EH ſit major. eſt autem AB ſolidum ſolido CD aequale; ergo major eſt CM ipſâ AG;

AG; ſi enim non, neque rurſus forent ſolida AB, CD aequalia; ponuntur autem aequalia. itaque ponatur CT aequalis ipſi AG, et a baſi quidem NP, altitudine autem CT ſolidum parallelepipedum CV compleatur. Quoniam igitur ſolidum AB ſolido CD eſt aequale, erit ut AB ſolidum ad ſolidum CV, ita CD
a. 7. 5. ſolidum ad ſolidum CV[a]. ſed ut AB ſolidum ad ſolidum CV, ita ba-
b. 32. 11. ſis EH ad NP baſim[b]; aeque alta enim ſunt AB, CV ſolida; ut autem ſolidum CD ad ipſum CV, ita MP ba-
c. 25. 11. ſis ad baſim PT[c], et recta MC ad
d. 1. 6. ipſam CT[d]; et igitur ut baſis EH ad NP baſim, ita MC ad CT. eſt autem CT aequalis AG; ergo et ut EH baſis ad baſim NP, ita MC ad AG. quare ſolidorum parallelepipedorum AB, CD baſes ſunt reciproce proportionales altitudinibus.



Rurſus ſolidorum parallelepipedorum AB, CD baſes ſint reciproce proportionales altitudinibus; ſitque ut EH baſis ad baſim NP, ita ſolidi CD altitudo ad altitudinem ſolidi AB; dico ſolidum AB ſolido CD aequale eſſe. ſint enim rurſus inſiſtentes ad rectos angulos baſibus. et ſiquidem baſis EH ſit aequalis baſi NP, eſtque ut EH baſis ad baſim NP, ita altitudo ſolidi CD ad ſolidi AB altitudinem; erit ſolidi CD altitudo al-
e. A. 5. titudini ſolidi AB aequalis[e]. ſolida autem parallelepipeda, quae ſunt in
f. 31. 11. aequalibus baſibus et eadem altitudine inter ſe aequalia ſunt[f]; ergo ſolidum AB ſolido CD eſt aequale.

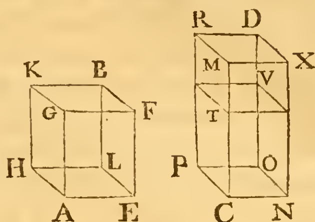
Sed non ſit EH baſis aequalis baſi NP, et ſit EH major. quoniam igitur

igitur eſt ut baſis EH ad baſim NP, ita CM altitudo ſolidi CD ad AG altitudinem ſolidi AB; erit CM major [e] ipſa AG. ponatur rurſus ipſi AG aequalis CT, et ſimiliter ſolidum CV compleatur. itaque quoniam eſt ut EH baſis ad baſim NP, ita CM ad ipſam AG; aequalis autem eſt AG ipſi CT, erit ut baſis EH ad NP baſim, ita MC ad CT. ſed ut baſis EH ad NP baſim, ita [b] AB ſolidum ad ſolidum CV; aeque alta enim ſunt ſolida AB, CV; ut autem MC ad CT, ita et MP baſis ad baſim PT, et ſolidum CD ad ſolidum CV [c]. et igitur ut ſolidum AB ad ſolidum CV, ita CD ſolidum ad ſolidum CV. utrumque igitur ſolidorum AB, CD ad ipſum CV eandem rationem habet; ſolidum igitur AB ſolido CD eſt aequale. Q. E. D.

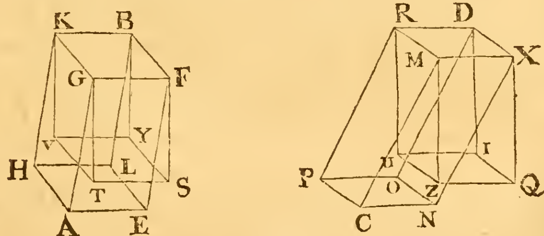
e. A. 5.

b. 32. 11.

c. 25. 11.

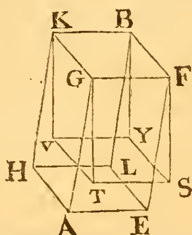


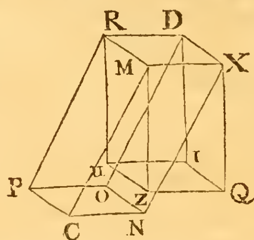
Non ſint autem ſtantes FE, BL, GA, KH; XN, DO, MC, RP ad rectos angulos baſibus ſolidorum; et a punctis F, B, K, G; X, D, R, M ad plana baſium EH, NP ducantur perpendiculares, quae planis



in punctis S, Y, V, T; Q, I, U, Z occurrant, et compleantur ſolida FV, XU, quae parallelepipeda erunt, ut in caſu ultimo Prop. 31. hujus oſtenſum fuit. Dico et ſic aequalibus exiſtentibus ſolidis AB, CD, ba-

ſes eſſe reciproce proportionales altitudinibus, ſc. ut EH baſis ad baſim NP, ita eſſe altitudinem ſolidi CD ad ſolidi AB altitudinem. Quoniam enim ſolidum AB ſolido CD eſt aequale, ſolido autem AB aequale eſt ſoli-
g. 29. aut 30. 11. dum BT [g], in eadem namque ſunt baſi FK, et eadem altitudine; et ſolidum DC eſt aequale ſolido DZ [g], in eadem enim rurſus ſunt baſi XR, et eadem altitudine; erit et ſolidum BT ſolido DZ aequale. aequalium autem ſolidorum parallelepipedorum, quorum inſiſtentes baſibus ipſorum ſunt ad rectos angulos, baſes ſunt reciproce proportionales altitudinibus, ut oſtenſum fuit. eſt igitur ut baſis FK ad baſim XR, ita ſolidi DZ altitudo ad altitudinem ſolidi BT. atque eſt baſis quidem FK





baſi EH aequalis, baſis vero XR aequalis baſi NP. quare ut EH baſis ad baſim NP, ita eſt altitudo ſolidi DZ ad ſolidi BT altitudinem. eaedem autem ſunt altitudines ſolidorum DZ, DC, ut et ſolidorum BT, BA. eſt igitur ut EH baſis ad baſim NP, ita ſolidi DC altitudo ad altitudinem ſolidi BA. Ergo ſolidorum parallelepipedorum AB, CD baſes ſunt reciproce proportionales altitudinibus.

Rurſus, ſolidorum parallelepipedorum AB, CD baſes ſint reciproce proportionales altitudinibus, ſitque ut EH baſis ad baſim NP, ita ſolidi CD altitudo ad altitudinem ſolidi AB. Dico ſolidum AB ſolido CD aequale eſſe. Iiſdem namque conſtructis, quoniam ut EH baſis ad baſim NP, ita ſolidi CD altitudo ad altitudinem ſolidi AB; et baſis quidem

dem EH eſt aequalis baſi FK; NP vero ipſi XR; erit ut FK baſis ad baſim XR, ita altitudo ſolidi CD ad ſolidi AB altitudinem. eaedem autem ſunt altitudines ſolidorum AB, BT, et ipſorum CD, DZ; eſt igitur ut FK baſis ad baſim XR, ita ſolidi DZ altitudo ad altitudinem ſolidi BT. quare ſolidorum BT, DZ parallelepipedorum baſes ſunt reciproce proportionales altitudinibus; ipſorum autem inſiſtentes ſunt ad rectos angulos baſibus; ergo, ut prius oſtenſum, BT ſolidum ſolido DZ eſt aequale. ſed ſolidum quidem BT aequale [g] eſt ſolido BA, ſolidum vero DZ eſt aequale ſolido [g] DC, ſiquidem in iiſdem ſunt baſibus, et eadem altitudine. Ergo et ſolidum AB ſolido CD eſt aequale. Q. E. D.

g. 29. aut 30. 11.

PROP. XXXV. THEOR.

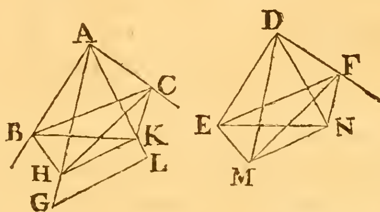
SI ſint duo anguli plani aequales, et in ipſorum verticibus ſublimes rectae lineae inſiſtant, quae cum rectis lineis a principio poſitis angulos contineant aequales, alterum alteri; in ſublimibus autem ſumantur quaevis puncta, atque ab ipſis ad plana in quibus ſunt anguli, perpendiculares ducantur; et a punctis quae a perpendicularibus fiunt in planis, ad primos angulos jungantur rectae lineae; hae cum ſublimibus aequales angulos continebunt.

Sint duo anguli plani aequales BAC, EDF; et a punctis A, D ſublimes rectae lineae AG, DM conſtituantur, quae cum rectis lineis a principio poſitis aequales angulos contineant, alterum alteri; angulum quidem GAB aequalem angulo MDE, angulum vero GAC angulo MDF aequalem; et ſumantur in ipſis AG, DM quaevis puncta G, M, a quibus ad plana per BAC, EDF ducantur perpendiculares GL, MN

 occurrentes

occurrentes planis in punctis L, N; et LA, ND jungantur. Dico angulum GAL angulo MDN aequalem esse.

Ponatur ipsi DM aequalis AH, et per H ipsi GL parallela ducatur HK. est autem GL perpendicularis ad planum BAC; ergo et HK
a. 8. 11. ad planum BAC perpendicularis erit[a]. ducantur a punctis K, N ad rectas lineas AB, AC, DE, DF perpendiculares KB, KC, NE, NF; et HB, BC, ME, EF jungantur. Quoniam igitur HK ad rectos angulos est plano BAC, erit et planum HBK quod per ipsam HK transit
b. 18. 11. ad rectos angulos plano BAC[b]; ducta autem est in plano BAC recta



AB ipsi BK planorum communi sectione ad rectos angulos; quare AB
c. 4. Def. 11. perpendicularis est ad planum HBK[c], et ad omnes rectas lineas quae
d. 3. Def. 11. in eo plano ipsam tangunt rectos faciet angulos[d]. tangit autem ipsam recta BH, in eo existens plano; rectus igitur est angulus ABH. eadem ratione et angulus DEM est rectus; ergo angulus ABH ipsi DEM est aequalis. est autem et HAB angulus aequalis angulo MDE. duo igitur triangula sunt HAB, MDE duos angulos duobus angulis aequales habentia, alterum alteri, et unum latus uni lateri aequale, quod uni aequalium angulorum subtenditur, videlicet HA ipsi DM; ergo et reliqua
e. 26. 1. latera reliquis lateribus aequalia habebunt, alterum alteri[e]. quare

AB

AB eſt aequalis DE. ſimiliter, junctis HC, MF demonſtrabimus et AC ipſi DF aequalem eſſe. Quoniam igitur AB quidem eſt aequalis DE, AC vero ipſi DF, erunt duae BA, AC duabus ED, DF aequales; ſed et angulus BAC angulo EDF eſt aequalis; baſis igitur BC baſi EF, et reliqui anguli reliquis angulis aequales ſunt[f]. ergo angulus f. 4. 1.
ABC angulo DEF eſt aequalis. eſt autem et rectus ABK aequalis recto DEN, quare et reliquus CBK reliquo FEN eſt aequalis. eadem ratione, et BCK angulus eſt aequalis angulo EFN. itaque duo ſunt triangula BCK, EFN duos angulos duobus angulis aequales habentia, alterum alteri, et unum latus uni lateri aequale, quod eſt ad aequales angulos, videlicet BC ipſi EF; ergo et reliqua latera reliquis lateribus aequalia [e] habebunt. aequalis igitur eſt BK ipſi EN. eſt autem et AB e. 26. 1.
ipſi DE aequalis; quare duae AB, BK duabus DE, EN aequales ſunt; et rectos continent angulos. baſis igitur AK eſt aequalis baſi DN. et cum AH ſit aequalis DM, erit et quod fit ex AH quadratum quadrato ex DM aequale. ſed quadrato ex AH aequalia [g] ſunt quadrata ex AK, g. 47. 1.
KH; etenim rectus eſt angulus AKH. quadrato autem ex DM aequalia [g] ſunt ex DN, NM quadrata, quia angulus DNM eſt rectus. quadrata igitur ex AK, KH quadratis ex DN, NM ſunt aequalia, quorum quadratum ex AK aequale eſt quadrato ex DN. ergo reliquum ex KH quadratum reliquo quadrato ex NM eſt aequale; et ideo recta linea HK ipſi MN aequalis. et quoniam duae HA, AK duabus MD, DN aequales ſunt, altera alteri, et baſis HK baſi MN oſtenſa eſt aequalis, angulus HAK angulo MDN aequalis erit[h]. Q. E. D. h. 8. 1.

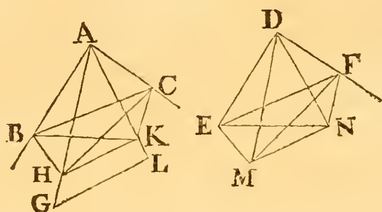
Cor. Ex hoc manifeſtum eſt, ſi ſint duo anguli plani aequales, ab ipſis autem conſtituantur ſublimes rectae lineae aequales, quae cum rectis lineis a principio poſitis aequales contineant angulos, alterum alteri, perpendiculares quae ab ipſis ad plana in quibus ſunt primi anguli ducuntur, inter ſe aequales eſſe.

Corollarii

Corollarii alia Demonſtratio.

Sint duo anguli plani BAC, EDF inter ſe aequales, et rectae ſublimes et aequales AH, DM, cum ipſis BA, AC, et ED, DF aequales contineant angulos, alterum alteri, angulum ſcilicet HAB angulo MDE, et angulum HAC angulo MDF aequalem; et ad plana BAC, EDF ducantur perpendiculares HK, MN; erit HK ipſi MN aequalis.

Quoniam enim angulus ſolidus ad A contentus eſt tribus angulis planis BAC, BAH, HAC qui, ſinguli ſingulis, ſunt aequales tribus an-



gulis planis EDF, EDM, MDF quibus continetur angulus ſolidus ad D; erunt anguli ſolidi ad A et D inter ſe aequales, et ſibi mutuo congruent; ſcilicet ſi planus angulus BAC applicetur plano angulo EDF, congruet recta AH rectae DM, ut oſtenſum fuit in Prop. B. hujus Libri. et quoniam AH aequalis eſt ipſi DM, punctum H congruet puncto
i. 13. 11. M. quare perpendicularis HK ad planum BAC congruet [i] perpendiculari MN ad planum EDF, quia haec plana ſibi mutuo congruunt. aequalis igitur eſt HK rectae MN. Q. E. D.

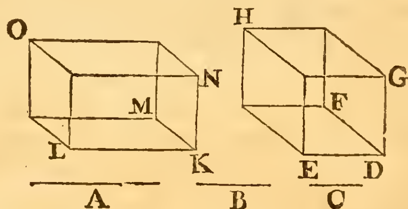
PROP. XXXVI.

PROP. XXXVI. THEOR.

SI tres rectae lineae proportionales ſint, ſolidum parallelepipedum quod a tribus fit, aequale eſt ſolido parallelepipedo quod fit a media, aequilatero quidem, cujuſque unus angulus ſolidus continetur tribus angulis planis, aequalibus planis angulis quibus unus ſolidus angulus antedicti ſolidi continetur, ſinguli ſingulis.

Sint tres rectae lineae proportionales A, B, C, ſit nempe A ad B, ut B ad C. Dico ſolidum quod fit ex ipſis A, B, C, aequale eſſe ſolido quod fit ex B, aequilatero quidem, aequiangulo autem antedicto.

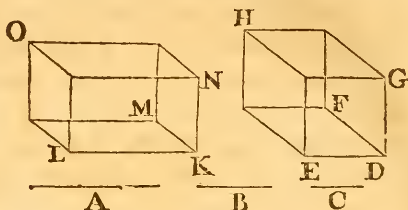
Exponatur ſolidus angulus ad D contentus tribus planis angulis EDF, FDG, GDE; et ipſi quidem B ponatur aequalis unaquaeque ipſarum ED, DF, DG, et ſolidum parallelepipedum DH compleatur. ipſi vero A ponatur aequalis recta LK, et ad rectam lineam LK, et ad punctum in ipſa K, conſtituatur [a] angulus ſolidus contentus planis angulis LKM, MKN, NKL, ipſis EDF, FDG, GDE aequalibus ſinguli ſingulis; et ponatur ipſi quidem B aequalis recta KN, ipſi vero C aequalis KM; et compleatur ſolidum parallelepipedum KO. Quoniam igitur eſt ut A ad B, ita B ad C, aequalis autem eſt A ipſi LK, et B utrique ipſarum DE, DF, et C ipſi KM; erit ut LK ad ED, ita DF ad KM. igitur circum aequales angulos latera ſunt reciproce proportionalia; ergo parallelogrammum LM parallelogrammo EF eſt aequale [b]. et quoniam duo anguli plani aequales ſunt EDF, LKM,



a. 26. 11.

b. 14. 6.

LKM, et in ipſis ſublimes rectae conſtituuntur DG, KN aequales inter ſe, et cum rectis lineis a principio poſitis aequales continentes angulos, alterum alteri; erunt perpendiculares quae a punctis G, N ad plana EDF, LKM ducuntur, inter ſe ae-



c. Cor. 35. 11. quales[c]. Ergo ſolida KO, DH eadem ſunt altitudine. quae vero in aequalibus baſibus ſunt ſolida parallelepipeda, et eadem altitudine, inter ſe ſunt ae-

d. 31. 11. qualia[d]. Ergo ſolidum KO aequale eſt ſolido DH. atque eſt ſolidum quidem KO quod ſit a tribus A, B, C; ſolidum vero DH quod ſit ex B.. ſi igitur tres rectae lineae &c. Q. E. D.

PROP. XXXVII. THEOR.

SI quatuor rectae lineae proportionales ſint; et quae ab ipſis fiunt ſolida parallelepipeda ſimilia et ſimiliter deſcripta proportionalia erunt. et ſi qui ab ipſis fiunt ſolida parallelepipeda ſimilia et ſimiliter deſcripta proportionalia ſint; et ipſae rectae lineae proportionales erunt.

Sint quatuor rectae lineae proportionales AB, CD, EF, GH, ſit ſc. ut AB ad CD, ita EF ad GH; et deſcribantur ab ipſis ſimilia et ſimiliter poſita ſolida parallelepipeda AK, CL, EM, GN. Dico ut AK ad CL, ita eſſe EM ad GN.

a. 11. 6. Fiant enim deinceps proportionales [a] AB, CD, O, P; ut et EF, GH, Q, R. Quoniam igitur eſt ut AB ad CD, ita EF ad GH; erit

b. 11. 5. et CD ad O, ut GH ad Q; et O ad P, ut Q ad R[b]; ergo ex ae-

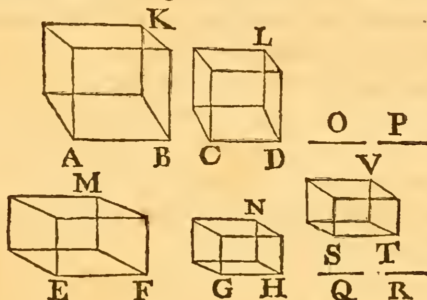
c. 22. 5. quali, eſt AB ad P, ut EF ad R[c]. ſed ut AB ad P, ita eſt ſolidum

AK

AK ad ſolidum CL[d]; et ut EF ad R, ita eſt ſolidum EM ad ſolidum GN[d]. ut igitur [b] ſolidum AK ad ſolidum CL, ita eſt ſolidum EM ad GN ſolidum. d. Cor. 33. 11. b. 11. 5.

Sed ſit ut ſolidum AK ad ſolidum CL, ita EM ſolidum ad ſolidum GN. Dico ut recta linea AB ad rectam CD, ita eſſe rectam EF ad ipſam GH.

Fiat enim ut AB ad CD, ita EF ad ST, et ab ipſa ST deſcribatur [e] ſolidum parallelepipedum SV ſimile, et ſimiliter poſitum alterutri ipſorum EM, GN. Quoniam igitur ut AB ad CD, ita eſt EF ad ST, et e. 27. 11.



deſcripta ſunt ab ipſis quidem AB, CD ſimilia et ſimiliter poſita parallelepipeda AK, CL; ab ipſis vero EF, ST, ſimilia et ſimiliter poſita parallelepipeda EM, SV; erit ut AK ad CL, ita EM ad SV. ponitur autem et ut AK ad CL, ita EM ad GN. aequale [f] igitur eſt ſolidum GN ſolido SV. eſt autem ipſi ſimile et ſimiliter poſitum; ergo plana quibus continentur ſimilia ſunt et aequalia, ipſorumque latera homologa GH, ST inter ſe aequalia erunt. Quoniam igitur ut AB ad CD, ita eſt EF ad ST; aequalis autem ST ipſi GH; erit ut AB ad CD, ita EF ad GH. Si igitur quatuor rectae lineae &c. Q. E. D. f. 9. 5.

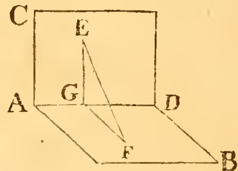
 PROP. XXXVIII.

PROP. XXXVIII. THEOR.

" SI planum ad planum rectum fit, et ab aliquo puncto
" eorum quae funt in uno plano, ad alterum planum
" perpendicularis ducatur; ea in planorum communem
" fectionem cadet.

" Planum enim CD ad planum AB rectum fit, communis autem
" eorum fectio fit AD, et in ipfo CD plano, quodvis punctum E fu-
" matur. Dico perpendicularem quae a puncto E ad planum AB du-
" citur, cadere in ipfam AD.

" Non enim, fed, fi fieri poteft, cadat extra, ut EF; et plano AB
" in puncto F occurrat; a puncto autem F ad DA in plano AB per-
a. 12. 1. " pendicularis ducatur FG[a], quae quidem
b. 4. Def. 11. " et plano CD ad angulos rectos erit[b]; et
" EG jungatur. Quoniam igitur FG plano
" CD eft ad angulos rectos, tangit autem ip-
" fam recta linea EG quae eft in eodem CD
c. 3. Def. 11. " plano, erit angulus FGE rectus[c]. fed et
" EF plano AB ad angulos rectos eft; rectus igitur eft angulus EFG.
" quare trianguli EFG duo anguli duobus rectis funt aequales; quod
" eft abfurdum. non igitur a puncto E ad AB planum perpendicula-
" ris ducta extra rectam lineam AD cadet; cadet igitur in ipfam AD.
" Si igitur planum &c. Q. E. D."

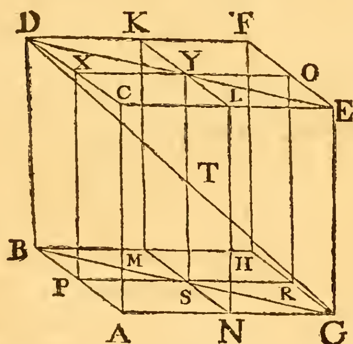


PROP. XXXIX.

PROP. XXXIX. THEOR.

SI in ſolido parallelepipedo oppoſitorum planorum latera ſecentur bifariam, per ſectiones vero plana ducantur; communis planorum ſectio et ſolidi parallelepipedi diameter ſe mutuo bifariam ſecabunt.

In ſolido enim parallelepipedo AF, oppoſitorum planorum CF, AH latera bifariam ſecentur in punctis K, L, M, N; X, O, P, R; et jungantur KL, MN, XO, PR. et quoniam DK, CL aequales ſunt et parallelae, erunt KL, DC parallelae [a]. eadem ratione, parallelae ſunt a. 33. 1.
MN, BA. eſt autem BA parallela ipſi DC; quoniam igitur utraque



ipſarum KL, BA parallela eſt ipſi DC, non in eodem cum ipſâ plano, erit KL parallela [b] ipſi BA. et quoniam utraque ipſarum KL, MN b. 9. 11.
parallela eſt ipſi BA, non in eodem cum ipſâ plano, erit KL parallela [b] ipſi MN; quare KL, MN in uno ſunt plano. ſimiliter et XO, PR oſtendentur in uno eſſe plano. Communis autem ſectio planorum KN,

XR ſit YS; et ſolidi parallelepipedi AF diameter ſit DG. Dico YS,
DG ſibi mutuo occurrere, et ſeſe bifariam ſecare.

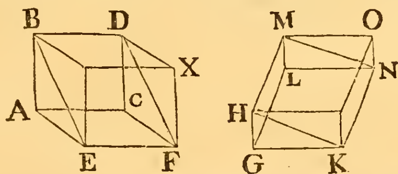
Jungantur enim DY, YE, BS, SG. Quoniam igitur DX parallela
c. 29. 1. eſt ipſi OE, alterni anguli DXY, YOE inter ſe aequales ſunt[c]. et quo-
niam DX quidem eſt aequalis OE, XY vero ipſi YO, et angulos ae-
quales continent; erit baſis DY aequalis baſi YE, et reliqui anguli re-
d. 4. 1. liquis angulis aequales[d]; angulus igitur XYD eſt aequalis angulo OYE,
e. 14. 1. et ob id recta linea eſt DYE[e]. eadem ratione, et BSG recta eſt; at-
que eſt BS aequalis SG. et quoniam CA ipſi DB aequalis eſt et paral-
lela, et CA aequalis eſt et parallela ipſi EG; erit et DB ipſi EG ae-
b. 9. 11. qualis et parallela[b]. et ipſas conjungunt rectae lineae DE, BG; paral-
a. 33. 1. lela [a] igitur et aequalis eſt DE ipſi BG. et ſumpta ſunt in utraque ip-
ſarum quaedam puncta D, Y, G, S, et junctae ſunt DG, YS. ergo
DG, YS in uno ſunt plano. et manifeſtum eſt propterea ipſas ſibi mu-
tuo occurrere; occurrant in T. et quoniam DE parallela eſt ipſi BG,
erit et EDT angulus angulo BGT aequalis[c], alterni enim ſunt; eſt au-
f. 15. 1. tem et DTY angulus aequalis [f] ipſi GTS. duo igitur ſunt triangula
DTY, GTS duos angulos duobus angulis aequales habentia, et unum
latus

latus uni lateri aequale, quod uni aequalium angulorum ſubtenditur, videlicet DY ipſi GS; dimidia enim ſunt ipſarum DE, BG. ergo et reliqua latera reliquis lateribus aequalia habebunt[g]. quare DT quidem eſt aequalis TG, YT vero ipſi TS. Si igitur in ſolido &c. Q. E. D. g. 26. 1.

PROP. XL. THEOR.

SI ſint duo priſmata triangularia aeque alta, quorum unum quidem baſim habeat parallelogrammum, alterum vero triangulum, et parallelogrammum duplum ſit trianguli; aequalia erunt ipſa priſmata.

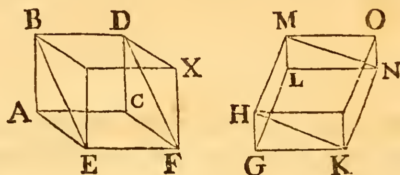
Sint priſmata aeque alta ABCDEF, GHKLMN, quorum primum continetur duobus triangulis ABE, CDF, et tribus parallelogrammis AD, DE, EC; alterum vero continetur duobus triangulis GHK, LMN, et tribus parallelogrammis LH, HN, NG; et unum quidem



baſim habeat parallelogrammum AF, alterum vero GHK triangulum, et duplum ſit AF parallelogrammum trianguli GHK. Dico priſma ABCDEF priſmati GHKLMN aequale eſſe.

Compleantur enim AX, GO ſolida, et quoniam parallelogrammum AF trianguli GHK eſt duplum; eſt autem et HK parallelogrammum duplum [a] trianguli GHK; erit AF parallelogrammum parallelo- a. 34. 1.
grammo

grammo HK aequale. quae vero in aequalibus ſunt baſibus ſolida pa-
b. 31. 11. rallelepipeda, et eadem altitudine, inter ſe aequalia [b] ſunt. aequale igitur eſt AX ſolidum ſolido GO. atque eſt ſolidi quidem AX dimi-



c. 28. 11. dium [c] ABCDEF priſma, ſolidi vero GO dimidium [c] eſt priſma GHKLMN. ergo ABCDEF priſma priſmati GHKLMN eſt aequale. Si igitur ſint duo priſmata &c. Q. E. D.

EUCLIDIS

EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBER DUODECIMUS.

LEMMA I.

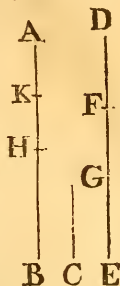
Neceſſarium quibuſdam hujus Libri Propoſitionibus; eſt vero Propoſitio prima Libri decimi.

DUABUS magnitudinibus inaequalibus expoſitis, ſi a majore auferatur majus quam dimidium, et a reliquâ rurſus auferatur majus quam dimidium; et hoc ſemper fiat; relinquetur tandem quaedam magnitudo quae minore magnitudine expoſita minor erit.

Sint duae magnitudines inaequales AB, C quarum major AB. Dico ſi ab AB auferatur majus quam dimidium, et a reliqua rurſus auferatur majus quam dimidium, et hoc ſemper fiat, relinqui tandem magnitudinem quandam, quae magnitudine C minor erit.

Etenim

Etenim C multiplicata fiet aliquando major magnitudine AB. multiplicetur, et ſit DE ipſius quidem C multiplex, major autem quam AB; dividaturque DE in partes ipſi C aequales DF, FG, GE. et ab ipſa AB auferatur majus quam dimidium BH, ab ipſa vero AH rurſus majus quam dimidium auferatur HK, atque hoc ſemper fiat quoad diviſiones quae ſunt in AB multitudine aequales fiant diviſionibus quae in DE; ſint igitur diviſiones AK, KH, HB diviſionibus DF, FG, GE multitudine aequales. et quoniam major eſt DE quam AB, et ablatum eſt ab ipſa quidem DE minus quam dimidium EG, ab ipſa vero AB majus quam dimidium BH; erit reliquum GD reliquo HA majus. rurſus quoniam major eſt GD quam HA, et ablatum eſt ab ipſa quidem GD dimidium GF; ab ipſa vero HA majus quam dimidium HK, reliquum FD reliquo AK majus erit. eſtque FD aequalis ipſi C; ergo C quam AK eſt major. minor igitur eſt AK quam C. Ergo ex magnitudine AB relicta eſt magnitudo AK expoſita minore magnitudine C minor. Q. E. D.



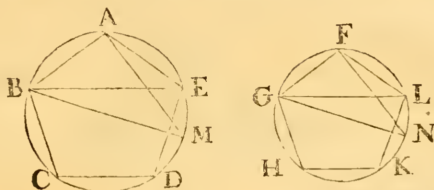
PROP. I. THEOR.

SIMILIA polygona circulis inſcripta inter ſe ſunt ut quadrata ex diametris.

Sint circuli ABCDE, FGHKL, et in ipſis ſimilia polygona ABCDE, FGHKL; diametri autem circulorum ſint BM, GN. Dico ut quadratum ex BM ad quadratum ex GN, ita eſſe ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL.

Jungantur enim BE, AM, GL, FN. et quoniam polygonum ABCDE ſimile eſt polygono FGHKL, erit et angulus BAE angulo GFL

GFL aequalis[a], et ut BA ad AE, ita GF ad FL[a]. duo igitur trian- a. 1. Def. 6.
gula ſunt BAE, GFL unum angulum uni angulo aequalem habentia, videlicet angulum BAE angulo GFL, circa aequales autem angulos latera proportionalia; quare triangulum ABE triangulo GFL aequiangulum eſt[b]; ac propterea angulus AEB aequalis eſt angulo FLG. ſed b. 6. 6.
angulus quidem AEB angulo AMB eſt aequalis[c], in eadem enim cir- c. 21. 3.
cumferentia conſiſtunt; angulus autem FLG aequalis eſt angulo FNG[c]; ergo et AMB angulus eſt aequalis angulo FNG. eſt autem et rectus



BAM aequalis recto GFN[d]; quare et reliquus reliquo aequalis. ae- d. 31. 3.
quiangulum igitur eſt triangulum ABM triangulo FGN. ergo ut BM ad GN, ita BA ad GF[e]; et duplicata ratio ipſius BM ad GN, ea- e. 4. 6.
dem erit [f] rationi duplicatae rationis BA ad GF. ſed rationis quidem f. 10. Def. 5. et 22. 5.
BM ad GN, duplicata eſt ratio quadrati ex BM ad quadratum ex GN[g]; g. 20. 6.
rationis vero BA ad GF duplicata eſt ratio polygoni ABCDE ad polygonum FGHKL[g]; et igitur ut quadratum ex BM ad quadratum ex GN, ita polygonum ABCDE ad polygonum FGHKL. Quare ſimilia polygona &c. Q. E. D.

PROP. II. THEOR.

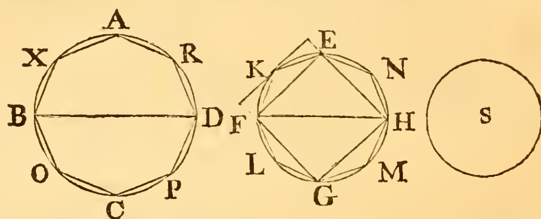
CIRCULI inter ſe ſunt ut quadrata ex diametris.

Sint circuli ABCD, EFGH, diametri autem ipſorum ſint BD, FH.

 Dico

Dico ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita eſſe circulum ABCD ad EFGH circulum.

Si enim non ita ſit, erit ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita circulus ABCD vel ad ſpatium aliquod minus circulo EFGH, vel ad majus*. ſit primum ad minus quod ſit S. et in circulo EFGH deſcribatur quadratum EFGH. itaque deſcriptum in circulo quadratum majus eſt dimidio circuli EFGH; quoniam ſi per puncta E, F, G, H contingentes circulum ducamus, erit deſcripti circa circulum quadrati



a. 41. 1. dimidium quadratum EFGH[a]; circulus autem minor eſt quadrato circa circulum deſcripto; ergo quadratum EFGH majus eſt dimidio circuli EFGH. ſecentur bifariam circumferentiae EF, FG, GH, HE in punctis K, L, M, N, et EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE jungantur. unumquodque igitur triangulorum EKF, FLG, GMH, HNE majus eſt dimidio ſegmenti circuli in quo conſiſtit; quoniam ſi per puncta K, L, M, N contingentes circulum ducamus, et parallelogramma quae ſunt ſuper rectis lineis EF, FG, GH, HE compleamus; erit unumquodque triangulorum EKF, FLG, GMH, HNE dimidium parallelo-

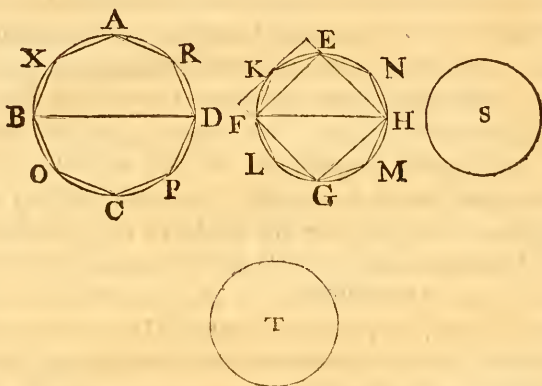
* Eſt enim quadratum quoddam aequale circulo ABCD; ſit latus ejuſdem P. poteſt igitur eſſe quarta proportionalis tribus BD, FH et P, quae ſit Q. Ergo quadrata ex hiſce proportionalia ſunt; hoc eſt, quadratis ex BD, FH et circulo ABCD poteſt exiſtere quartum proportionale, ſit hoc S. et ſimiliter quaedam in ſequentibus quibuſdam Propoſitionibus, intelligenda ſunt.

grammi

grammi quod ad ipſum eſt[a]. ſed ſegmentum minus eſt parallelogram- a. 41. 1.
mo. quare unumquodque triangulorum EKF, FLG, GMH, HNE majus eſt dimidio ſegmenti circuli in quo conſiſtit. Haſce igitur circumferentias bifariam ſecantes, et jungentes rectas lineas, atque hoc ſemper facientes, relinquemus tandem quaedam circuli ſegmenta, quae minora erunt exceſſu, quo circulus EFGH ipſum S ſpatium ſuperat. etenim oſtenſum eſt in praecedenti Lemmate, duabus magnitudinibus inaequalibus expoſitis, ſi a majori auferatur majus quam dimidium, et a reliqua, rurſus majus quam dimidium, et hoc ſemper fiat, relinqui tandem magnitudinem aliquam, quae minori magnitudine expoſita ſit minor. itaque relicta ſint ſegmenta EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE, quae minora ſint exceſſu, quo circulus EFGH ipſum S ſpatium ſuperat. Ergo reliquum EKFLGMHN polygonum majus erit ſpatio S. Deſcribatur etiam in circulo ABCD, polygono EKFLGMHN ſimile polygonum AXBOCPDR. eſt igitur ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita polygonum AXBOCPDR ad EKFLGMHN polygonum[b]. ſed et ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita b. 1. 12.
ABCD circulus ad ſpatium S. ergo et ut circulus ABCD ad ſpatium S, ita polygonum AXBOCPDR ad EKFLGMHN polygonum[c]. c. 11. 5.
major autem eſt circulus ABCD eo quod in ipſo eſt polygono; quare et ſpatium S majus eſt polygono EKFLGMHN[d]. ſed et minus, d. 14. 5.
ut prius oſtenſum; quod fieri non poteſt. non igitur eſt ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita ABCD circulus ad ſpatium aliquod minus circulo EFGH. ſimiliter oſtendemus neque eſſe ut quadratum ex FH ad quadratum ex BD, ita circulus EFGH ad aliquod ſpatium minus circulo ABCD. Dico etiam neque eſſe ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita circulum ABCD ad aliquod ſpatium majus circulo EFGH. ſi enim fieri poteſt, ſit ad majus ſpatium T. erit igitur invertendo ut quadratum ex FH ad quadratum ex

 BD,

BD, ita ſpatium T ad ABCD circulum. erit autem ut ſpatium † T ad ABCD circulum, ita circulus EFGH ad ſpatium quoddam, quod
d. 14. 5. quidem minus erit circulo ABCD[d], quia ſpatium T majus eſt EFGH circulo. ergo et ut quadratum ex FH ad quadratum ex BD, ita EFGH circulus ad aliquod ſpatium minus circulo ABCD; quod fieri non poſſe



oſtenſum eſt. non igitur ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita eſt circulus ABCD ad ſpatium aliquod majus EFGH circulo. oſtenſum autem eſt neque ad minus. quare ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita erit ABCD circulus ad circulum ‡ EFGH. Circuli igitur ſunt ut quadrata ex diametris. Q. E. D.

† Oſtenſum enim eſt in praecedenti Nota ad * poſſe exiſtere quartum proportionale quadratis ex BD, FH et circulo ABCD quod dicebatur S. et ſimiliter ſpatio T, circuliſque ABCD, EFGH poteſt eſſe quartum proportionale. eodem modo in ſequentibus quibuſdam Propoſitionibus ſimilia intelligenda ſunt.

‡ Etenim quoniam poſſit exiſtere quarta proportionalis quadratis ex BD, FH et circulo ABCD, quae quidem neque minor neque major poteſt eſſe circulo EFGH, ut oſtenſum fuit; igitur circulo huic neceſſario aequalis erit.

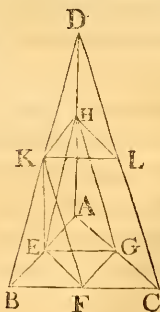
PROP. III.

PROP. III. THEOR.

OMNIS pyramis triangularem habens baſim dividitur in duas pyramides aequales et ſimiles inter ſe, quae triangulares baſes habent, ſimileſque toti; et in duo priſmata aequalia, quae quidem priſmata dimidio totius pyramidis ſunt majora.

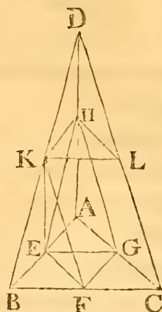
Sit pyramis cujus baſis quidem ABC triangulum, vertex autem punctum D. Dico pyramidem ABCD dividi in duas pyramides aequales et ſimiles inter ſe, triangulares baſes habentes, et ſimiles toti; et in duo priſmata aequalia; et duo priſmata dimidio totius pyramidis eſſe majora.

Secentur enim AB, BC, CA, AD, DB, DC bifariam in punctis E, F, G, H, K, L, et EH, EG, GH, HK, KL, LH, EK, KF, FG jungantur. Quoniam igitur AE quidem eſt aequalis EB, AH vero ipſi HD, erit HE ipſi DB parallela[a]. eadem ratione et HK eſt parallela ipſi AB. parallelogrammum igitur eſt HEBK; quare HK eſt aequalis EB[b]. ſed EB ipſi AE eſt aequalis; ergo et AE ipſi HK aequalis erit. eſt autem et AH aequalis HD; duae igitur EA, AH duabus KH, HD aequales ſunt, altera alteri; et angulus EAH aequalis angulo KHD[c]; baſis igitur EH baſi KD eſt aequalis, et triangulum AEH aequale [d] et ſimile triangulo HKD. eadem ratione et triangulum AGH triangulo HLD aequale eſt et ſimile. et quoniam duae rectae lineae EH, HG ſeſe tangentes duabus rectis lineis ſeſe tangentibus KD, DL parallelae ſunt, non autem in eodem plano,



a. 2. 6.
b. 34. 1.
c. 29. 1.
d. 4. 1.

e. 10. 11. plano, aequales angulos continebunt[e]; ergo angulus EHG eſt aequa-
lis angulo KDL. rurſus quoniam duae rectae lineae EH, HG duabus
rectis lineis KD, DL aequales ſunt altera alteri, et angulus EHG eſt
d. 4. 1. aequalis angulo KDL; erit baſis EG baſi KL aequalis[d], et triangu-
lum EHG triangulo KDL aequale [d] erit et ſimile. eadem ratione et
AEG triangulum eſt aequale et ſimile triangulo HKL. Quare pyramis
cujus baſis quidem eſt AEG triangulum, vertex autem punctum H, ae-
qualis et ſimilis eſt pyramidi cujus baſis eſt triangulum KHL, et vertex
f. C. 11. D punctum[f]. et quoniam uni laterum trianguli ADB, videlicet ipſi AB,
parallela ducta eſt HK, erit triangulum ADB
triangulo HDK aequiangulum, et propterea la-
g. 4. 6. tera habent proportionalia[g]. ſimile igitur eſt
ADB triangulum triangulo HDK. et eadem ra-
tione triangulum quidem DBC ſimile eſt triangulo
DKL; triangulum vero ADC triangulo HDL;
et adhuc triangulum ABC triangulo AEG. oſ-
tenſum autem eſt triangulum AEG ſimile trian-
gulo HKL, ergo et ABC triangulum triangulo
h. 21. 6. HKL ſimile erit[h]. et pyramis igitur cujus baſis
quidem triangulum ABC, vertex autem punctum



D, ſimilis eſt pyramidi cujus baſis triangulum HKL, et vertex punctum
i. B. 11. et 11. Def. 11. D[i]. ſed pyramis cujus baſis quidem HKL triangulum, vertex autem
punctum D, oſtenſa eſt ſimilis pyramidi cujus baſis triangulum AEG,
et vertex H punctum. quare et pyramis cujus baſis triangulum ABC,
et vertex punctum D, ſimilis eſt pyramidi cujus baſis AEG triangulum,
et vertex punctum H. utraque igitur ipſarum AEGH, HKLD pyra-
midum ſimilis eſt toti pyramidi ABCD. et quoniam BF eſt aequalis
k. 41. 1. FC, erit EBFG parallelogrammum duplum trianguli GFC[k]. et quo-
niam ſi duo priſmata aeque alta ſint, quorum unum quidem baſim ha-
bet

bet parallelogrammum, alterum vero triangulum, ſitque parallelogrammum duplum trianguli; ſunt ea priſmata inter ſe aequalia[l]; aequale l. 40. 11.
igitur erit priſma cujus baſis eſt EBFG parallelogrammum, et oppoſita ipſi recta linea KH, priſmati cujus baſis eſt triangulum GFC, et oppoſitum ipſi triangulum HKL; etenim aeque alta ſunt, quia ſunt inter plana parallela [m] ABC, HKL. et manifeſtum eſt utrumque ipſorum m. 15. 11.
priſmatum, et cujus baſis eſt EBFG parallelogrammum, oppoſita autem ipſi HK recta linea, et cujus baſis eſt GFC triangulum, et oppoſitum ipſi triangulum HKL, majus eſſe utrâque pyramidum, quarum baſes quidem AEG, HKL triangula, vertices autem puncta H, D; quoniam ſi jungamus EF rectam lineam, priſma quidem cujus baſis eſt EBFG parallelogrammum, et oppoſita ipſi recta linea KH, majus eſt pyramide cujus baſis EBF triangulum, vertex autem punctum K; ſed pyramis cujus baſis triangulum EBF, et vertex K punctum, eſt aequalis [f] f. C. 11.
pyramidi cujus baſis AEG triangulum, et vertex punctum H; aequalibus enim et ſimilibus planis continentur. quare et priſma cujus baſis parallelogrammum EBFG, oppoſita autem ipſi recta linea HK, majus eſt pyramide cujus baſis AEG triangulum et vertex punctum H. priſma vero cujus baſis parallelogrammum EBFG, et oppoſita ipſi recta linea HK eſt aequale priſmati cujus baſis GFC triangulum, et ipſi oppoſitum triangulum HKL; et pyramis cujus baſis triangulum AEG, vertex autem H punctum, eſt aequalis pyramidi cujus baſis HKL triangulum, et vertex punctum D. Ergo duo priſmata de quibus dictum eſt, ſunt majora duabus dictis pyramidibus quarum baſes triangula AEG, HKL, vertices autem H, D puncta. tota igitur pyramis cujus baſis ABC triangulum, vertex autem punctum D, diviſa eſt in duas pyramides aequales, et ſimiles inter ſe, et ſimiles toti; et in duo priſmata aequalia; ſuntque duo priſmata dimidio totius pyramidis majora. Q. E. D.

PROP. IV.

PROP. IV. THEOR.

SI ſint duae pyramides aeque altae, quae triangulares baſes habent, dividatur autem utraque ipſarum, et in duas pyramides aequales inter ſe, ſimileſque toti, et in duo priſmata aequalia; et factarum pyramidum utraque eodem modo dividatur, atque hoc ſemper fiat. erit ut unius pyramidis baſis ad baſim alterius, ita et in una pyramide priſmata omnia ad priſmata omnia in altera pyramide multitudine aequalia.

Sint duae pyramides aeque altae quae triangulares baſes habent ABC, DEF, vertices autem ſint puncta G, H; et dividatur utraque ipſarum in duas pyramides aequales inter ſe ſimileſque toti, et in duo priſmata aequalia; et factarum pyramidum utraque eodem modo diviſa intelligatur; atque hoc ſemper fiat. Dico ut ABC baſis ad baſim DEF, ita eſſe priſmata omnia quae ſunt in pyramide ABCG ad priſmata omnia quae in pyramide DEFH multitudine aequalia.

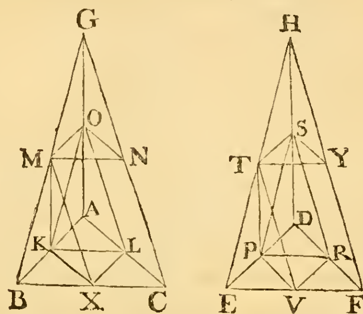
Eadem fiat conſtructio quae in praecedente, et quoniam BX quidem eſt aequalis XC, AL vero ipſi LC; erit XL ipſi AB parallela[a], et triangulum ABC triangulo LXC ſimile. eadem ratione et triangulum DEF ſimile eſt triangulo RVF. et quoniam BC quidem eſt dupla CX, EF vero dupla ipſius FV, erit ut BC ad CX, ita EF ad FV. et deſcripta ſunt ab ipſis BC, CX ſimilia et ſimiliter poſita rectilinea ABC, LXC; ab ipſis vero EF, FV ſimilia et ſimiliter poſita rectilinea DEF, RVF. eſt igitur ut ABC triangulum ad triangulum LXC, ita triangulum DEF ad RVF triangulum[b]; et permutando ut triangulum ABC ad triangulum DEF, ita LXC triangulum ad triangulum RVF. Quoniam vero parallela ſunt plana ABC, OMN[c], ut et DEF, STY[c], perpendiculares

a. 2. 6.
b. 22. 6.
c. 15. 11.

pendiculares a punctis G, H ad bases ABC, DEF, quae sunt inter se aequales, a planis OMN, STY bifariam secabuntur[d], quia et rectae GC, HF bifariam ab iisdem planis sectae sunt in N, Y punctis. aeque alta igitur sunt prismata LXC, OMN; RVF, STY; et propterea ut basis LXC ad basim RVF, hoc est ut triangulum ABC ad triangulum DEF, ita est prisma cujus basis est triangulum LXC, oppositum autem ipsi OMN ad prisma cujus basis RVF triangulum, et oppositum ipsi STY[e]. et quoniam duo prismata quae in pyramide ABCG inter se aequalia sunt, sed et quae in pyramide DEFH duo prismata sunt inter se aequalia,

d. 17. 11.

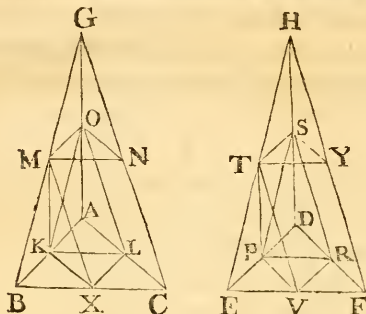
e. Cor. 32. 11.



erit ut prisma cujus basis parallelogrammum KBXL, opposita vero ipsi recta linea MO, ad prisma cujus basis LXC triangulum, et oppositum ipsi OMN; ita [f] prisma cujus basis parallelogrammum PEVR, et opposita recta linea TS, ad prisma cujus basis RVF triangulum, oppositum vero ipsi STY. quare componendo, ut prismata KBXLMO, LXCOMN ad prisma LXCOMN; ita prismata PEVRTS, RVFSTY ad prisma RVFSTY. et permutando, ut prismata KBXLMO, LXCOMN ad prismata PEVRTS, RVFSTY; ita prisma LXCOMN ad prisma RVFSTY. ut autem prisma LXCOMN ad prisma RVFSTY, ita os-

f. 7. 5.

tensa est ABC basis ad basim DEF. ergo et ut basis ABC ad basim DEF, ita quae in pyramide ABCG duo prismata ad duo prismata quae in pyramide DEFH. similiter autem et si factas pyramides dividamus eodem modo velut OMNG, STYH, erit ut OMN basis ad basim STY, ita quae in pyramide OMNG duo prismata ad duo prismata quae in pyramide STYH. sed ut OMN basis ad basim STY, ita basis



ABC ad DEF basim; et ut igitur ABC basis ad basim DEF, ita quae in pyramide ABCG duo prismata ad duo prismata quae in pyramide DEFH; et quae in pyramide OMNG duo prismata ad duo prismata quae in pyramide STYH; et quatuor ad quatuor. eadem autem ostendentur et in factis prismatibus ex divisione pyramidum AKLO, et DPRS, et omnium omnino multitudine aequalium. Q. E. D.

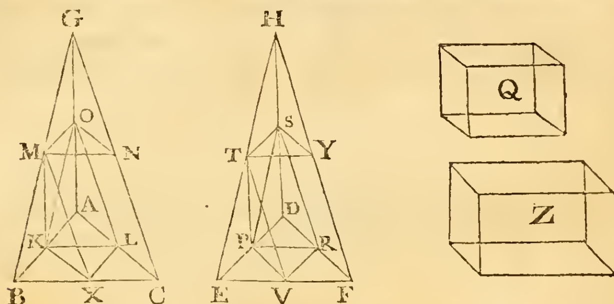
PROP. V. THEOR.

PYRAMIDES quae eadem sunt altitudine, et triangulares bases habent, inter se sunt ut bases.

Sint eadem altitudine pyramides, quarum bases quidem triangula ABC,

ABC, DEF, vertices autem puncta G, H. Dico ut ABC basis ad basim DEF, sic esse pyramidem ABCG ad DEFH pyramidem.

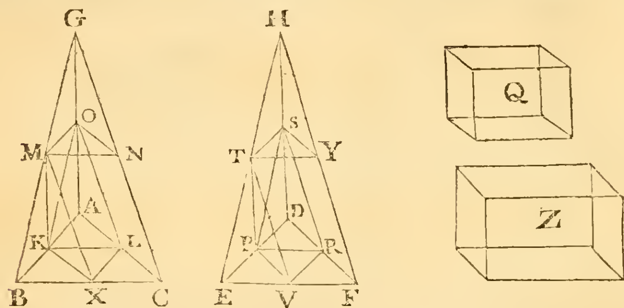
Si enim non ita sit, erit ut ABC basis ad basim DEF, sic ABCG pyramis vel ad solidum minus pyramide DEFH, vel ad majus*. sit primum ad solidum minus, sitque Q. et dividatur pyramis DEFH in duas pyramides aequales inter se, et similes toti, et in duo prismata aequalia. sunt igitur duo prismata dimidio totius pyramidis majora[a]. et a. 3. 12. rursus pyramides ex divisione factae similiter dividantur, atque hoc semper fiat quoad relinquantur quaedam pyramides in pyramide DEFH,



quae sint minores excessu quo pyramis DEFH solidum Q superat. itaque sumantur, et sint exempli causa, pyramides DPRS, STYH. erunt igitur reliqua in pyramide DEFH prismata solido Q majora. dividatur etiam ABCD pyramis similiter et in totidem partes atque pyramis DEFH. ergo ut ABC basis ad basim DEF, ita quae in pyramide ABCG prismata ad prismata quae in pyramide DEFH[b]. sed ut ABC b. 4. 12. basis ad basim DEF, ita pyramis ABCG ad solidum Q; et igitur ut ABCG pyramis ad solidum Q, ita quae in pyramide ABCG prismata ad prismata quae in pyramide DEFH. major autem est pyramis

* Hoc eodem modo ostendi potest quo simile ostensum est in Prop. 2. ad notam *.

ABCG prismatibus quae in ipsa sunt; ergo et solidum Q prismatibus
c. 14. 5. quae sunt in pyramide DEFH est majus[c]. sed et minus, quod fieri non potest. non igitur ut ABC basis ad basim DEF, ita est pyramis ABCG ad solidum aliquod minus pyramide DEFH. similiter ostendemus neque ut DEF basis ad basim ABC, ita esse pyramidem DEFH ad solidum aliquod pyramide ABCG minus. Dico etiam neque esse ut ABC basis ad basim DEF, ita ABCG pyramidem ad aliquod solidum majus pyramide DEFH. si enim fieri potest, sit ad majus, videlicet ad solidum Z. erit igitur invertendo, ut DEF basis ad basim



ABC, ita solidum Z ad ABCG pyramidem. erit autem ut solidum Z ad ABCG pyramidem, ita DEFH pyramis ad aliquod solidum †, quod quidem minus erit pyramide ABCG[c], quia solidum Z majus est pyramide DEFH. et ut igitur DEF basis ad basim ABC, ita pyramis DEFH ad solidum aliquod pyramide ABCG minus, quod est absurdum. non igitur ut ABC basis ad basim DEF, ita est ABCG pyramis ad solidum aliquod majus pyramide DEFH. ostensum autem est, neque ad minus. Quare ut ABC basis ad basim DEF, ita est pyramis ABCG ad DEFH pyramidem. Pyramides igitur quae &c. Q. E. D.

† Hoc eodem modo ostendetur quo simile in Prop. 2. ad notam †.

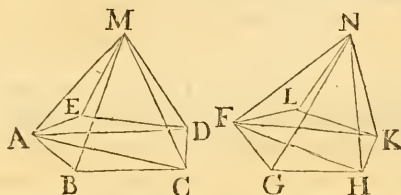
PROP. VI.

PROP. VI. THEOR.

PYRAMIDES quae eadem ſunt altitudine et polygonas baſes habent, inter ſe ſunt ut baſes.

Sint eadem altitudine pyramides, polygonas habentes baſes ABCDE, FGHKL, vertices autem M, N puncta. Dico ut ABCDE baſis ad baſim FGHKL, ita eſſe ABCDEM pyramidem ad pyramidem FGHKLN.

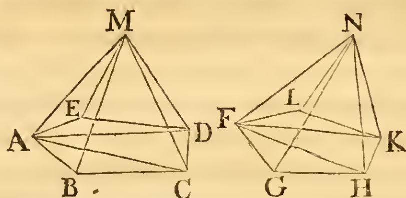
Dividatur enim baſis quidem ABCDE in triangula ABC, ACD, ADE; baſis vero FGHKL in triangula FGH, FHK, FKL. et ſuper unoquoque triangulo intelligantur pyramides quarum quae ſuper baſibus ABC, ACD, ADE vertex communis ſit M punctum, reliquarum



vero communis vertex ſit punctum N. Quoniam igitur eſt ut triangulum ABC ad triangulum FGH, ita ABCM pyramis ad pyramidem FGHN[a]; ut vero triangulum ACD ad triangulum FGH, ita ACDM a. 5. 12.
pyramis ad pyramidem FGHN; et adhuc ut ADE triangulum ad triangulum FGH, ita pyramis ADEM ad pyramidem FGHN; erit ut omnes antecedentes primi ad communem conſequentem, ita omnes antecedentes reliqui ad conſequentem communem[b]; hoc eſt erit ut baſis b. 2. Cor. 24. 5.
ABCDE ad baſim FGH, ita pyramis ABCDEM ad pyramidem FGHN. eademque ratione ut baſis FGHKL ad baſim FGH, ita erit pyramis FGHKLN ad pyramidem FGHN, et invertendo. Quoniam igitur ut

baſis

basis ABCDE ad basim FGH, ita pyramis ABCDEM ad pyramidem FGHN; ut vero FGH basis ad basim FGHKL, ita FGHN pyramis



c. 22. 5. ad pyramidem FGHKLN; erit ex aequali [c] ut basis ABCDE ad basim FGHKL, ita ABCDEM pyramis ad pyramidem FGHKLN. Pyramides igitur quae &c. Q. E. D.

PROP. VII. THEOR.

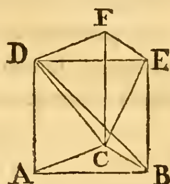
OMNE prisma triangularem habens basim, dividitur in tres pyramides aequales inter se, quae triangulares bases habent.

Sit prisma cujus basis quidem triangulum ABC, oppositum autem ipsi DEF. Dico prisma ABCDEF dividi in tres pyramides aequales inter se, quae triangulares habent bases.

Jungantur enim BD, EC, CD; et quoniam parallelogrammum est ABED cujus diameter BD, erit ABD triangulum triangulo EBD ae-
a. 34. 1. quale [a]; ergo pyramis cujus basis triangulum ABD, vertex autem punc-
b. 5. 12. tum C, aequalis est [b] pyramidi cujus basis EBD triangulum, et vertex punctum C. sed pyramis cujus basis EBD triangulum, et vertex punctum C, eadem est cum pyramide cujus basis triangulum EBC, et vertex D punctum; iisdem enim planis continentur. ergo et pyramis cujus basis triangulum ABD, vertex autem punctum C, aequalis est pyramidi

midi cujus basis EBC triangulum, et vertex punctum D. rursus, quoniam FCBE parallelogrammum est cujus diameter CE, triangulum ECF triangulo ECB est aequale[a]; ergo et pyramis cujus basis ECB triangulum, vertex autem punctum D, aequalis est pyramidi cujus basis triangulum ECF, et vertex punctum D[b]. sed pyramis cujus basis quidem ECB triangulum, vertex autem punctum D ostensa est aequalis pyramidi cujus basis triangulum ABD, et vertex C punctum. quare et pyramis cujus basis triangulum ECF, et vertex punctum D, aequalis est pyramidi cujus basis triangulum ABD, et vertex C punctum. prisma igitur ABCDEF dividitur in tres pyramides inter se aequales quae triangulares bases habent, videlicet in ipsas ABDC, EBDC, ECFD. et quoniam pyramis cujus basis ABD triangulum, vertex autem punctum C, eadem est cum pyramide, cujus basis triangulum ABC, et vertex D punctum, iisdem namque planis continentur; pyramis vero cujus basis triangulum ABD, et vertex punctum C, tertia pars ostensa est prismatis cujus basis ABC triangulum, et oppositum ipsi DEF; et pyramis igitur, cujus basis triangulum ABC, vertex autem D punctum, tertia pars est prismatis eandem basim habentis, videlicet ABC triangulum, et oppositum ipsi triangulum DEF. Q. E. D.

a. 34. 1.
b. 5. 12.



Cor. 1. Ex hoc manifestum est omnem pyramidem tertiam partem esse prismatis basim habentis eandem, et altitudinem aequalem; quoniam si basis prismatis aliam quandam figuram rectilineam obtineat, dividi potest prisma in alia prismata quae triangulares bases habent.

Cor. 2. Prismata aeque alta sunt inter se ut bases; quoniam pyramides super iisdem basibus et eadem altitudine inter se sunt ut bases[c]. c. 6. 12.

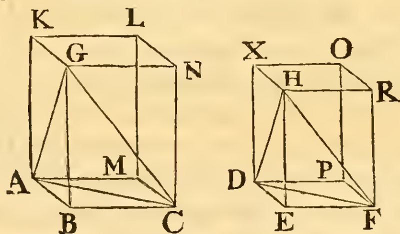
PROP. VIII.

PROP. VIII. THEOR.

SIMILES pyramides quae triangulares bafes habent, in triplicata funt ratione homologorum laterum.

Sint fimiles et fimiliter pofitae pyramides, quarum bafes quidem triangula ABC, DEF, vertices autem G, H puncta. Dico ABCG pyramidem ad pyramidem DEFH, triplicatam rationem habere ejus quam BC habet ad latus homologum EF.

Compleantur enim parallelogramma ABCM, GBCN, ABGK, et folidum parallelepipedum BGML quod hifce planis, ipfifque oppofitis continetur. fimiliter compleatur folidum parallelepipedum EHPO contentum tribus parallelogrammis DEFP, HEFR, DEHX, ipfifque op-



pofitis. et quoniam pyramis ABCG fimilis eft pyramidi DEFH, erit
a. 11. Def. 11. angulus ABC angulo DEF aequalis[a], angulufque GBC aequalis angulo HEF, et angulus ABG angulo DEH. atque eft ut AB ad BC, ita
b. 1. Def. 6. DE ad EF[b], hoc eft circum aequales angulos latera funt proportionalia; parallelogrammum igitur BM parallelogrammo EP fimile erit. eadem ratione et parallelogrammum BN fimile eft parallelogrammo ER, et BK ipfi EX. tria igitur parallelogramma BM, BN, BK tribus EP, ER, EX funt fimilia. fed tria quidem BM, BN, BK tribus oppofitis

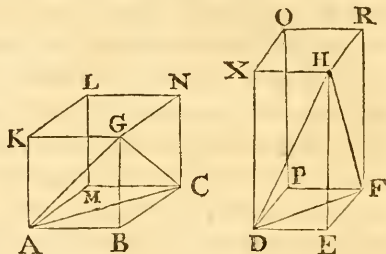
positis aequalia et similia sunt[c], tria vero EP, ER, EX tribus opposi- c. 24. 11.
tis aequalia et similia. quare solida BGML, EHPO similibus planis multitudine aequalibus continentur, suntque ipsorum anguli solidi aequales[d]; ac propterea simile est BGML solidum solido EHPO[a]. similia d. B. 11. a. 11. Def. 11.
autem solida parallelepipeda in triplicata sunt ratione homologorum laterum[e]. ergo solidi BGML ad solidum EHPO ratio triplicata est ejus e. 33. 11.
quam habet latus homologum BC ad EF homologum latus. sed ut BGML solidum ad solidum EHPO, ita ABCG pyramis ad pyramidem DEFH[f]; pyramis enim sexta pars est ipsius solidi, cum prisma quod f. 15. 5.
est dimidium solidi parallelepipedi[g], sit pyramidis triplum[h]. Quare et g. 28. 11. h. 7. 12.
pyramis ABCG ad pyramidem DEFH triplicatam rationem habet ejus quam BC ad EF. Q. E. D.

Cor. Ex hoc perspicuum est, et similes pyramides quae multangulas bases habent, inter se esse in triplicata ratione homologorum laterum. ipsis enim divisis in pyramides triangulares bases habentes; quoniam et similia polygona quae sunt in basibus, in similia triangula dividuntur, et multitudine aequalia et homologa totis; erit ut una pyramis, in prima pyramide, triangularem habens basim ad unam pyramidem, in secunda, triangularem basim habentem, ita omnes pyramides, in prima pyramide, triangulares habentes bases ad omnes, in secunda pyramide, triangulares bases habentes; hoc est, pyramis prima multangulam habens basim ad secundam pyramidem quae multangulam basim habet. sed pyramis triangularem habens basim ad pyramidem quae triangularem basim habet, est in triplicata ratione homologorum laterum; et pyramis igitur polygonam habens basim ad pyramidem similem basim habentem, triplicatam rationem habet ejus quam latus homologum ad homologum latus.

PROP. IX. THEOR.

AEqualium pyramidum, et triangulares bases habentium, bases et altitudines reciproce sunt proportionales. et quarum pyramidum triangulares bases habentium bases et altitudines reciproce sunt proportionales, illae sunt aequales.

Sint enim pyramides aequales triangulares habentes bases ABC, DEF, vertices vero G, H puncta. Dico pyramidum ABCG, DEFH bases et altitudines esse reciproce proportionales, scilicet ut ABC basis ad basim DEF, ita esse pyramidis DEFH altitudinem ad altitudinem pyramidis ABCG.



Compleantur enim parallelogramma AC, AG, GC ut et DF, DH, HF; compleanturque solida parallelepipeda BGML, EHPO quae planis illis, ipsisque oppositis continentur. et quoniam pyramis ABCG est aequalis pyramidi DEFH, atque est pyramidis quidem ABCG sextuplum BGML solidum, pyramidis vero DEFH sextuplum solidum
a. 1. Ax. 5. EHPO; erit solidum BGML solido EHPO aequale[a]. aequalium autem solidorum parallelepipedorum bases et altitudines sunt reciproce
b. 34. 11. proportionales[b]; est igitur ut BM basis ad basim EP, ita EHPO solidi altitudo ad altitudinem solidi BGML. sed ut BM basis ad basim EP, ita ABC triangulum ad triangulum DEF; ergo et ut ABC triangulum ad triangulum DEF, ita solidi EHPO altitudo ad altitudinem solidi

ſolidi BGML. ſed ſolidi quidem EHPO altitudo eadem eſt cum altitudine pyramidis DEFH; ſolidi vero BGML altitudo eadem eſt cum altitudine pyramidis ABCG; eſt igitur ut ABC baſis ad baſim DEF, ita pyramidis DEFH altitudo ad altitudinem pyramidis ABCG. Quare pyramidum ABCG, DEFH baſes et altitudines reciproce ſunt proportionales.

Sed pyramidum ABCG, DEFH baſes et altitudines reciproce ſint proportionales, ſit ſcilicet ut ABC baſis ad baſim DEF, ita pyramidis DEFH altitudo ad altitudinem pyramidis ABCG. Dico ABCG pyramidem pyramidi DEFH aequalem eſſe.

Iiſdem enim conſtructis, quoniam ut ABC baſis ad baſim DEF, ita eſt DEFH pyramidis altitudo ad altitudinem pyramidis ABCG; ut autem ABC baſis ad baſim DEF, ita BM parallelogrammum ad parallelogrammum EP; erit et ut parallelogrammum BM ad EP parallelogrammum, ita pyramidis DEFH altitudo ad altitudinem pyramidis ABCG. ſed pyramidis quidem DEFH altitudo eadem eſt cum altitudine ſolidi parallelepipedi EHPO; pyramidis vero ABCG altitudo eadem eſt cum altitudine ſolidi parallelepipedi BGML. eſt igitur ut BM baſis ad baſim EP, ita EHPO ſolidi parallelepipedi altitudo ad altitudinem ſolidi parallelepipedi BGML. quorum autem ſolidorum parallelepipedorum baſes et altitudines reciproce ſunt proportionales, ea ſunt aequalia[b]. ſolidum igitur parallelepipedum BGML aequale eſt ſolido b. 34. 11. parallelepipedo EHPO. atque eſt ſolidi quidem BGML ſexta pars pyramis ABCG; ſolidi vero EHPO ſexta pars eſt pyramis DEFH. ergo pyramis ABCG pyramidi DEFH eſt aequalis. Aequalium igitur pyramidum &c. Q. E. D.

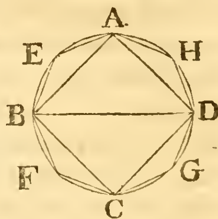
 PROP. X.

PROP. X. THEOR.

OMnis conus tertia pars eſt cylindri, qui eandem baſim habet et altitudinem aequalem.

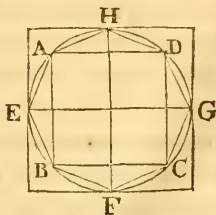
Habeat conus eandem baſim quam cylindrus, videlicet circulum ABCD, et altitudinem aequalem. Dico conum tertiam partem eſſe cylindri, hoc eſt cylindrum coni triplum eſſe.

Si enim cylindrus non ſit triplus coni, vel major erit quam triplus, vel minor. Sit primo major quam triplus; et deſcribatur in ABCD circulo quadratum ABCD; ergo quadratum ABCD majus eſt quam dimidium ABCD circuli. et a quadrato ABCD erigatur priſma aeque altum cylindro; priſma vero hoc majus erit quam cylindri dimidium; quoniam ſi circa circulum ABCD quadratum deſcribatur, et ab ipſo erigatur priſma aeque altum cylindro, erit inſcriptum quadratum dimidium circumſcripti. et ſunt ab iis baſibus quadratis erecta ſolida parallelepipeda aeque alta, nimirum priſmata; priſma igitur a quadrato ABCD dimidium eſt priſmatis erecti a quadrato quod circa circulum ABCD deſcribitur. ete-



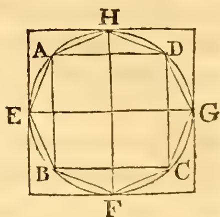
a. 32. 11. nim inter ſe ſunt ut baſes[a]. atque eſt cylindrus minor priſmate erecto a quadrato quod deſcribitur circa circulum ABCD. priſma igitur erectum a quadrato ABCD aeque altum cylindro, dimidio cylindri eſt majus. ſecentur circumferentiae AB, BC, CD, DA bifariam in punctis E, F, G, H, et AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA jungantur. unumquodque igitur triangulorum AEB, BFC, CGD, DHA majus eſt dimidio portionis circuli ABCD, in qua conſiſtit, ut prius oſtenſum in Prop. 2. hujus. Erigantur ab unoquoque triangulorum AEB, BFC, CGD,

CGD, DHA priſmata aeque alta cylindro; ergo et unumquodque
erectorum priſmatum majus eſt dimidio portionis cylindri quae ad ip-
ſum eſt; quoniam ſi per puncta E, F, G, H parallelae ipſis AB, BC,
CD, DA ducantur, et compleantur ſuper ipſis AB, BC, CD, DA pa-
rallelogramma, a quibus ſolida parallelepipeda aeque alta cylindro eri-
gantur; erunt uniuſcujuſque erectorum dimidia, ea quae ſuper triangu-
lis AEB, BFC, CGD, DHA ſunt priſmata[b]. et ſunt cylindri portio- b. 2. Cor. 7. 12.
nes erectis ſolidis parallelepipedis minores. ergo et priſmata quae ſuper
triangulis AEB, BFC, CGD, DHA majora ſunt dimidio portionum
cylindri quae ad ipſa ſunt. itaque reliquas circumferentias ſecantes bi-
fariam, jungenteſque rectas lineas, et ab unoquoque triangulorum eri-
gentes priſmata aeque alta cylindro, et hoc ſemper facientes, tandem
relinquemus quaſdam portiones cylindri quae minores erunt exceſſu,
quo cylindrus coni triplum ſuperat[c]. relinquantur, et ſint ea quae ſunt c. Lemma.
ſuper ſegmenta circuli AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA; reli-
quum igitur priſma cujus baſis quidem polygonum AEBFCGDH, al-
titudo autem eadem quae cylindri, majus eſt quam triplum coni. ſed
priſma cujus baſis AEBFCGDH polygonum, et altitudo eadem quae
cylindri, triplum eſt pyramidis, cujus baſis polygonum AEBFCGDH,
vertex autem idem qui coni[d]; et pyramis igitur cujus baſis polygonum d. 1. Cor. 7. 12.
AEBFCGDH, vertex autem idem qui coni,
major eſt cono qui baſim habet ABCD cir-
culum. ſed et minor; ab ipſo enim com-
prehenditur; quod fieri non poteſt. Dico in-
ſuper neque cylindrum minorem eſſe triplo
coni. ſi enim fieri poteſt, ſit cylindrus minor
quam triplus coni. erit igitur, invertendo, co-
nus major quam tertia pars cylindri. deſcriba-
tur in ABCD circulo quadratum ABCD; ergo quadratum ABCD ma-



jus

jus eſt quam dimidium ABCD circuli. et a quadrato ABCD erigatur pyramis, verticem habens eundem quem conus; pyramis igitur erecta major eſt quam coni dimidium. quoniam, ut ante demonſtravimus, ſi circa circulum quadratum deſcribatur, erit quadratum ABCD dimidium ejus quod circa circulum deſcriptum eſt; et ſi a quadratis erigantur ſolida parallelepipeda aeque alta cono, quae et priſmata ſunt, erit quod a quadrato ABCD erigitur dimidium ejus quod erectum eſt a quadrato
a. 32. 11. circa circulum deſcripto; etenim inter ſe ſunt ut baſes [a]; quare et tertiae partes ipſarum. pyramis igitur cujus baſis quadratum ABCD, dimidia eſt ejus pyramidis quae a quadrato circa circulum deſcripto erigitur. ſed pyramis erecta a quadrato deſcripto circa circulum major eſt cono, ipſam namque comprehendit; ergo pyramis cujus baſis ABCD quadratum, vertex autem idem qui coni major eſt quam coni dimidium. ſecentur circumferentiae AB, BC, CD, DA bifariam in punctis E, F, G, H, et jungantur AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA. et



unumquodque igitur triangulorum AEB, BFC, CGD, DHA majus eſt quam dimidium portionis circuli in qua conſiſtit. erigantur ab unoquoque triangulorum AEB, BFC, CGD, DHA pyramides verticem habentes eundem quem conus. Ergo unaquaeque pyramidum hoc modo erectarum major eſt quam dimidium portionis coni quae eſt ad ipſam, quod eodem modo oſtendetur, quo ſimile oſtenſum fuit de priſmatibus et ſegmentis cylindri. itaque reliquas circumferentias ſecantes bifariam, jungenteſque rectas lineas, et ab unoquoque triangulorum erigentes pyramides verticem habentes eundem quem conus, et hoc ſemper facientes, relinquemus tandem quaſdam coni portiones quae minores
c. Lemma. erunt exceſſu quo conus tertiam cylindri partem ſuperat [c]. relinquantur,

ct

et ſint quae ſuper circuli ſegmentis AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA. reliqua igitur pyramis cujus baſis AEBFCGDH, et vertex idem qui coni, major eſt quam tertia cylindri pars. ſed pyramis cujus baſis polygonum AEBFCGDH, vertex autem idem qui coni, tertia pars eſt priſmatis cujus baſis polygonum AEBFCGDH, altitudo autem eadem quae cylindri. priſma igitur cujus baſis AEBFCGDH polygonum, et altitudo eadem quae cylindri, majus eſt cylindro cujus baſis eſt circulus ABCD. ſed et minus, ab ipſo enim comprehenditur; quod fieri non poteſt. non igitur cylindrus minor eſt quam triplus coni. oſtenſum autem eſt neque majorem eſſe quam triplum. ergo cylindrus coni triplus eſt; ac propterea conus tertia pars cylindri. Omnis igitur conus tertia pars eſt &c. Q. E. D.

PROP. XI. THEOR.

CONI et cylindri qui eandem habent altitudinem, inter ſe ſunt ut baſes.

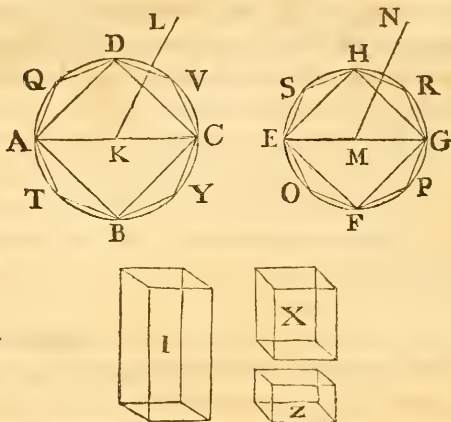
Sint in eadem altitudine coni et cylindri, quorum baſes circuli ABCD, EFGH, axes autem KL, MN, et diametri baſium AC, EG. Dico ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita eſſe conum AL ad conum EN.

Si enim non ita ſit, erit ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita conus AL ad aliquod ſolidum minus cono EN, vel ad majus. ſit primo ad minus quod ſit X; et quo minus eſt ſolidum X cono EN, ei aequale ſit Z ſolidum; conus igitur EN ipſis ſolidis X, Z eſt aequalis. deſcribatur in EFGH circulo quadratum EFGH; majus igitur erit quadratum dimidio circuli. erigatur a quadrato EFGH pyramis aeque alta cono*; pyramis igitur erecta major eſt coni dimidio. nam ſi circa

* Potius, eundem quem conus verticem habens, et ſic in ſequentibus quibuſdam.

circulum

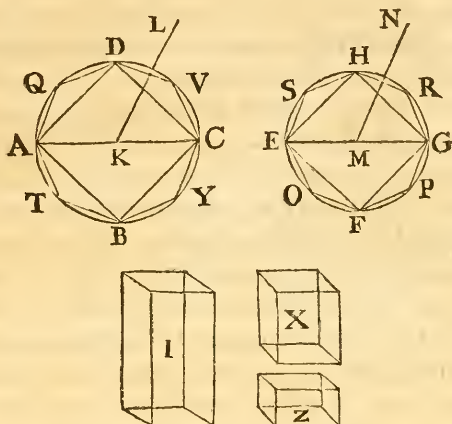
circulum quadratum describamus, et ab ipso erigamus pyramidem aeque altam cono, erit inscripta pyramis pyramidis circumscriptae dimidium;
a. 6. 12. etenim inter se sunt ut bases [a]. conus autem circumscripta pyramide est minor; ergo pyramis cujus basis quadratum EFGH, vertex autem idem qui coni, major est coni dimidio. secentur circumferentiae EF, FG, GH, HE bifariam in punctis O, P, R, S, et EO, OF, FP, PG, GR, RH, HS, SE jungantur. unumquodque igitur triangulorum EOF, FPG,



GRH, HSE majus est quam dimidium segmenti circuli in quo consistit. erigatur ab unoquoque triangulorum EOF, FPG, GRH, HSE pyramis aeque alta cono; ergo et unaquaeque erectarum pyramidum major est dimidio portionis coni quae est ad ipsam. itaque reliquas circumferentias secantes bifariam, et jungentes rectas lineas, et ab unoquoque triangulorum erigentes pyramides aeque altas cono, atque hoc semper facientes, relinquemus tandem aliquas portiones coni quae solido
b. Lemma. Z minores erunt [b]. relinquantur, et sint quae super circuli segmentis EO,

EO, OF, FP, PG, GR, RH, HS, SE. reliqua igitur pyramis cujus baſis polygonum EOFPGRHS, altitudo autem eadem quae coni, major eſt ſolido X. deſcribatur in circulo ABCD polygono EOFPGRHS ſimile polygonum ATBYCVDQ, et ab ipſa erigatur pyramis aeque alta cono AL. quoniam igitur eſt ut quadratum ex AC ad quadratum ex EG, ita ATBYCVDQ polygonum ad polygonum EOFPGRHS[c]; c. 1. 12.
ut autem quadratum ex AC ad quadratum ex EG, ita ABCD circulus ad circulum EFGH[d]; erit ut ABCD circulus ad circulum EFGH, d. 2. 12.
ita polygonum ATBYCVDQ ad polygonum EOFPGRHS[e]. ſed ut e. 11. 5.
ABCD circulus ad circulum EFGH, ita conus AL ad X ſolidum; et ut polygonum ATBYCVDQ ad polygonum EOFPGRHS, ita [a] py- a. 6. 12.
ramis cujus baſis ATBYCVDQ polygonum, vertex autem punctum L, ad pyramidem cujus baſis polygonum EOFPGRHS, et vertex punctum N. ut igitur conus AL ad X ſolidum, ita pyramis cujus baſis polygonum ATBYCVDQ, et vertex punctum L ad pyramidem cujus baſis polygonum EOFPGRHS, et vertex N punctum. conus autem AL major eſt pyramide quae eſt in ipſo; majus igitur eſt ſolidum X pyramide quae eſt in cono EN[f]. ſed et minus; quod eſt abſurdum. non igi- f. 14. 5.
tur ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita eſt AL conus ad ſolidum aliquod minus cono EN. ſimiliter demonſtrabitur neque ut EFGH circulus ad circulum ABCD, ita eſſe conum EN ad aliquod ſolidum minus cono AL. Dico praeterea neque eſſe ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita AL conum ad aliquod ſolidum majus cono EN. ſi enim fieri poteſt, ſit ad ſolidum majus, quod ſit I. Ergo invertendo ut EFGH circulus ad circulum ABCD, ita erit ſolidum I ad AL conum. erit autem ut ſolidum I ad AL conum, ita conus EN ad aliquod ſolidum, quod quidem minus erit cono AL[f], quia ſolidum I majus eſt cono EN. et igitur ut EFGH circulus ad circulum ABCD, ita conus EN ad aliquod ſolidum minus cono AL, quod fieri non poſſe

oſtenſum eſt. non igitur ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita conus AL ad aliquod ſolidum majus cono EN. oſtenſum autem eſt neque eſſe ad minus. Ergo ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita eſt conus AL ad EN conum. ſed ut conus ad conum, ita eſt cy-



g. 15. 5. h. 10. 12. lindrus ad cylindrum[g]; eſt enim uterque utriuſque triplus[h]. et igitur ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita ſunt ſuper ipſis cylindri aeque alti. Ergo coni et cylindri qui eandem habent altitudinem, inter ſe ſunt ut baſes. Q. E. D.

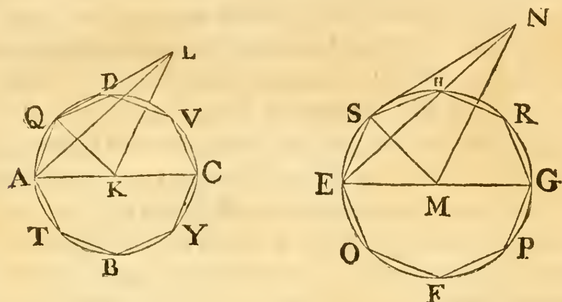
PROP. XII. THEOR.

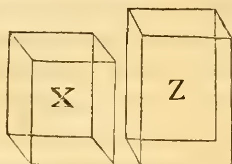
SIMILES coni et cylindri inter ſe ſunt in triplicata ratione diametrorum baſium.

Sint ſimiles coni et cylindri, quorum baſes quidem circuli ABCD, EFGH, diametri vero baſium AC, EG, et axes conorum vel cylindrorum

rum KL, MN. Dico conum cujus basis ABCD circulus, vertex autem punctum L, ad conum cujus basis circulus EFGH, vertex autem N punctum, triplicatam habere rationem ejus quam habet AC ad EG.

Si enim non habet conus ABCDL ad conum EFGHN triplicatam rationem ejus quam AC ad EG, habebit ABCDL conus ad aliquod solidum minus cono EFGHN triplicatam rationem, vel ad majus. ha-



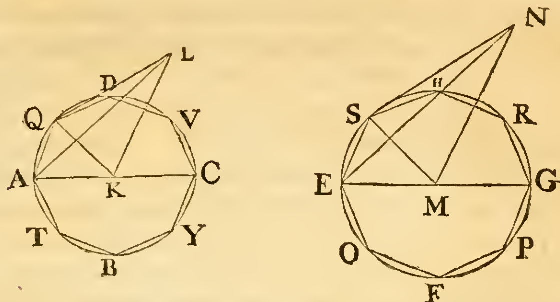


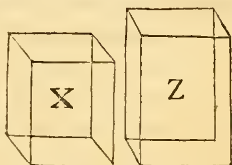
beat primum ad minus quod sit X; iisdemque omnino ut in propositione praecedente constructis, ostendetur, ut in ea, pyramidem cujus basis quidem polygonum EOFPGRHS, vertex autem N punctum, majorem esse solido X. describatur etiam in circulo ABCD, polygono EOFPGRHS simile polygonum ATBYCVDQ, a quo erigatur pyramis eundem verticem habens quem conus; et triangulorum continentium pyramidem cujus basis quidem est polygonum ATBYCVDQ,

vertex autem punctum L, unum ſit LAQ; triangulorum vero continentium pyramidem cujus baſis EOFPGRHS polygonum, et vertex punctum N, unum ſit NES; et jungantur KQ, MS. Quoniam igitur conus ABCDL ſimilis eſt cono EFGHN, erit ut AC ad EG, ita
a. 24. Def. 11. b. 15. 5. KL axis ad axem MN[a]; ut autem AC ad EG, ita AK ad EM[b]; itaque ut AK ad EM, ita KL ad MN; et permutando ut AK ad KL, ita EM ad MN. et anguli AKL, EMN aequales ſunt, rectus enim uterque eſt; circa igitur aequales angulos latera ſunt proportionalia, et
c. 6. 6. propterea ſimile[c] eſt AKL triangulum triangulo EMN. rurſus, quoniam eſt ut AK ad KQ, ita EM ad MS et ſunt circa aequales angulos AKQ, EMS, etenim quae pars eſt angulus AKQ quatuor rectorum qui ſunt ad K centrum, eadem eſt pars et angulus EMS quatuor rectorum qui ſunt ad centrum M; erit triangulum AKQ triangulo EMS ſimile[c]. et quoniam oſtenſum eſt ut AK ad KL, ita eſſe EM ad MN, aequalis autem eſt AK ipſi KQ, et EM ipſi MS, erit ut QK ad KL, ita SM ad MN; igitur circa aequales angulos QKL, SMN, ſunt enim recti, latera ſunt proportionalia; quare triangulum LKQ ſimile eſt triangulo NMS. et quoniam ob ſimilitudinem triangulorum AKL, EMN eſt ut LA ad AK, ita NE ad EM; ob ſimilitudinem vero triangulorum AKQ, EMS, ut KA ad AQ, ita ME ad ES; erit ex aequali
d. 22. 5. [d] LA ad AQ, ita NE ad ES. rurſus, quoniam ob ſimilitudinem triangulorum LQK, NSM eſt ut LQ ad QK, ita NS ad SM; et ob ſimilitudinem triangulorum KAQ, MES ut KQ ad QA, ita MS ad SE; ex aequali [d] erit ut LQ ad QA, ita NS ad SE. oſtenſum autem eſt et ut QA ad AL, ita SE ad EN; quare rurſus ex aequali ut QL ad LA, ita SN ad NE. triangulorum igitur LQA, NSE proportio-
e. 5. 6. nalia ſunt latera, ideoque aequiangula ſunt LQA, NSE triangula[e], et inter ſe ſimilia. quare et pyramis cujus baſis triangulum AKQ, vertex autem L punctum, ſimilis eſt pyramidi cujus baſis EMS triangulum, et

et vertex punctum N, ſunt enim et ipſarum anguli ſolidi inter ſe aequales[f], et ſimilibus planis multitudine aequalibus continentur. pyramides autem ſimiles, et quae triangulares baſes habent, in triplicata ſunt ratione homologorum laterum[g]; ergo pyramis AKQL ad pyramidem EMSN triplicatam habet rationem ejus quam AK habet ad EM. ſimiliter a punctis quidem D, V, C, Y, B, T ad K, a punctis

f. B. 11.
g. 8. 12.





vero H, R, G, P, F, O ad M ducentes rectas lineas, et a triangulis erigentes pyramides vertices eoſdem habentes quos coni, oſtendemus et unamquamque pyramidum ad unamquamque ejuſdem ordinis triplicatam rationem habere ejus quam habet AK latus ad homologum latus EM, hoc eſt quam AC ad EG. ſed ut unum antecedentium ad unum conſequentium, ita omnia antecedentia ad omnia conſequentia[h]; eſt igitur et ut AKQL pyramis ad pyramidem EMSN, ita tota pyramis cujus

h. 12. 5.

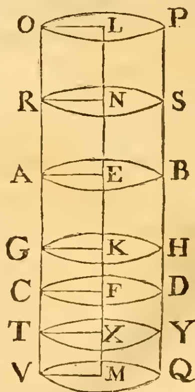
jus baſis ATBYCVDQ polygonum, vertex autem punctum L, ad totam pyramidem cujus baſis polygonum EOFPGRHS, et vertex punctum N. quare et pyramis cujus baſis ATBYCVDQ polygonum vertex autem punctum L, ad pyramidem cujus baſis polygonum EOFPGRHS, et vertex punctum N, triplicatam rationem habet ejus quam AC habet ad EG. ponitur autem conus cujus baſis circulus ABCD, vertex autem punctum L, ad ſolidum X triplicatam rationem habere ejus quam AC ad EG; ut igitur conus cujus baſis circulus ABCD, vertex autem punctum L, ad ſolidum X, ita eſt pyramis cujus baſis ATBYCVDQ polygonum, vertex autem punctum L, ad pyramidem cujus baſis polygonum EOFPGRHS, et vertex punctum N. dictus autem conus major eſt pyramide quae in ipſo, etenim eam comprehendit; majus igitur eſt ſolidum X pyramide cujus baſis polygonum
i. 14. 5. EOFPGRHS, vertex autem punctum N[i]. ſed et minus; quod fieri non poteſt. non igitur conus cujus baſis ABCD circulus, et vertex punctum L, ad aliquod ſolidum minus cono cujus baſis circulus EFGH, et vertex N punctum, triplicatam rationem habet ejus quam AC habet ad EG. ſimiliter demonſtrabimus neque conum EFGHN ad aliquod ſolidum minus cono ABCDL, triplicatam rationem habere ejus quam habet EG ad AC. Dico neque ABCDL conum ad ſolidum majus cono EFGHN triplicatam habere rationem ejus quam AC habet ad EG. ſi enim fieri poteſt, habeat ad aliquod ſolidum majus, quod ſit Z. invertendo igitur, ſolidum Z ad conum ABCDL triplicatam rationem habet ejus quam EG ad AC. erit autem ut ſolidum Z ad conum ABCDL, ita EFGHN conus ad aliquod ſolidum, quod quidem minus erit cono ABCDL, quoniam ſolidum Z majus eſt cono EFGHN. ergo et conus EFGHN ad ſolidum aliquod minus cono ABCDL, triplicatam rationem habebit ejus quam EG habet ad AC, quod fieri non poſſe demonſtratum eſt. non igitur ABCDL conus ad ſolidum aliquod

aliquod majus cono EFGHN, triplicatam rationem habet ejus quam AC ad EG. ostensum autem est neque ad minus. Quare conus ABCDL ad EFGHN conum, triplicatam rationem habet ejus quam AC ad EG. ut autem conus ad conum, ita cylindrus ad cylindrum[k]; ostensum enim est omnem conum tertiam partem esse cylindri eandem quam ipse basim habentis, et aequalem altitudinem. Ergo et cylindrus ad cylindrum triplicatam rationem habebit ejus quam AC ad EG. similes igitur coni et cylindri inter se sunt in triplicata ratione diametrorum basium. Q. E. D. k. 15. 5.

PROP. XIII. THEOR.

SI cylindrus plano secetur oppositis planis parallelo, erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.

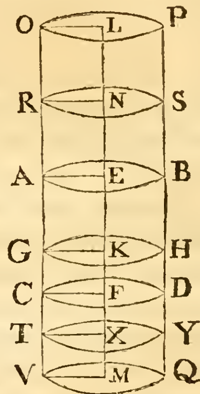
Cylindrus enim AD plano GH secetur oppositis planis AB, CD parallelo, et occurrat axi EF in K puncto, sitque linea GH communis sectio plani GH et superficiei cylindri AD. sit autem AEFC parallelogrammum rectangulum cujus revolutione circa rectam EF cylindrus AD describitur, in quacunque ejus positione; et sit recta GK communis sectio plani GH et ipsius AEFC. Quoniam igitur plana parallela AB, GH secta sunt plano AEKG, erunt AE, GK communes ipsorum sectiones parallelae[a]; quare parallelogrammum est AK, et propterea KG est aequalis ipsi EA quae sc. est ex centro circuli AB. eadem ratione et omnes rectae quae ducuntur a puncto K ad lineam GH aequales ostendentur iis quae sunt ex centro a. 16. 11.



circuli

circuli AB; quare et inter ſe ſunt aequales. linea igitur GH eſt circum-
b. 15. Def. 1. ferentia circuli [b] cujus centrum eſt punctum K. planum igitur GH cylindrum AD dividit in cylindros AH, GD; ſunt enim iidem qui deſcriberentur revolutione parallelogrammorum AK, GF circa rectas EK, KF. Dico igitur ut AH cylindrus ad cylindrum HC, ita EK axem ad axem KF.

Producatur enim EF axis ex utraque parte ad puncta L, M; et ipſi quidem EK axi ponantur aequales quotcunque EN, NL; ipſi vero FK aequales quotcunque FX, XM; et per puncta L, N, X, M ducantur plana ipſis AB, CD parallela. igitur, ut de plano GH oſtenſum fuit, planorum illorum et ſuperficiei cylindri productae communes ſectiones erunt circuli quorum centra ſunt L, N, X, M puncta, et abſcindent plana cylindros PR, RB, DT, TQ. Quoniam igitur axes LN, NE, EK inter ſe ſunt aequales, erunt cylindri PR, RB, BG
c. 11. 12. inter ſe ut baſes [c]. aequales autem ſunt baſes; ergo et cylindri PR, RB, BG ſunt aequales. quoniam vero axes LN, NE, EK ſunt inter ſe aequales, ſunt autem et cylindri PR, RB, BG, aequales inter ſe, atque eſt ipſorum LN, NE, EK multitudo aequalis multitudini ipſorum PR, RB, BG; quam multiplex eſt axis KL ipſius KE axis, tam multiplex erit et PG cylindrus cylindri GB. eadem ratione et quam multiplex eſt MK axis ipſius axis KF, tam multiplex eſt et QG cylindrus cylindri GD. et ſi quidem axis KL ſit aequalis axi KM, erit et PG cylindrus cylindro GQ aequalis; ſi autem axis KL major ſit axe KM, et cylindrus PG major erit cylindro GQ; et ſi minor, minor. quatuor igitur exiſtentibus magnitudinibus, videlicet axibus



axibus EK, KF, et cylindris BG, GD, ſumpta ſunt utcunque aeque multiplicia, axis quidem EK et BG cylindri, nempe axis KL et cylindrus PG; axis vero KF et cylindri GD utcunque aeque multiplicia, axis ſcilicet KM, et GQ cylindrus; et demonſtratum eſt ſi KL axis ſuperat axem KM, et PG cylindrum ſuperare cylindrum GQ; et ſi aequalis, aequalem eſſe; et ſi minor, minorem. eſt igitur [d] axis EK ad axem KF, ut BG cylindrus ad cylindrum GD. Quare ſi cylindrus plano ſecetur &c. Q. E. D. d. 5. Def. 5.

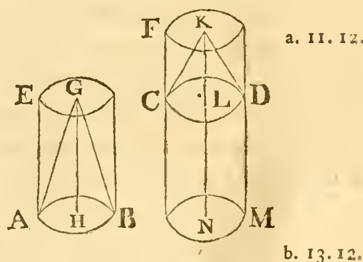
PROP. XIV. THEOR.

SUPER aequalibus baſibus exiſtentes coni et cylindri, inter ſe ſunt ut altitudines.

Sint enim in aequalibus baſibus AB, CD, cylindri EB, FD. Dico ut EB cylindrus ad cylindrum FD, ita eſſe GH axem ad axem KL.

Producatur enim KL axis ad punctum N, ponaturque ipſi GH axi aequalis LN; et circa axem LN intelligatur cylindrus CM. Quoniam igitur cylindri EB, CM eandem habent altitudinem, inter ſe ſunt ut baſes [a]. baſes autem ſunt aequales; ergo et cylindri EB, CM inter ſe aequales erunt. et quoniam cylindrus FM ſecatur plano CD, oppoſitis planis parallelo, erit ut CM cylindrus ad cylindrum FD, ita axis LN ad KL axem [b]. aequalis autem eſt cylindrus quidem CM cylindro EB; axis vero LN axi GH. eſt igitur ut EB cylindrus ad cylindrum FD, ita axis GH ad KL axem. ut autem EB cylindrus ad cylindrum FD, ita ABG conus ad conum CDK [c], cylindri enim ſunt conorum tripli [d]. Ergo et ut GH axis ad axem KL,

a. 11. 12.



b. 13. 12.

c. 15. 5.

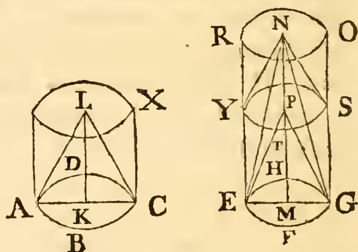
d. 10. 12.

KL, ita eſt ABG conus ad conum CDK, et cylindrus EB ad FD cylindrum. Super aequalibus igitur &c. Q. E. D.

PROP. XV. THEOR.

AEQUALIUM conorum et cylindrorum baſes et altitudines reciproce ſunt proportionales; et quorum conorum et cylindrorum baſes et altitudines reciproce ſunt proportionales, illi inter ſe ſunt aequales.

Sint aequales coni et cylindri, quorum baſes quidem ABCD, EFGH circuli, et diametri ipſorum AC, EG; axes autem KL, MN, qui quidem et conorum vel cylindrorum ſunt altitudines; et ſint coni quidem ALC, ENG, cylindri vero AX, EO. Dico cylindrorum AX, EO baſes et altitudines reciproce proportionales eſſe, hoc eſt, ut ABCD baſis ad baſim EFGH, ita eſſe altitudinem MN ad altitudinem KL.



Altitudo enim KL vel aequalis eſt altitudini MN, vel non aequalis. ſit primum aequalis. eſt autem AX cylindrus aequalis cylindro EO. qui autem eandem habent altitudinem coni et cy-
a. 11. 12. lindri inter ſe ſunt ut baſes [a]; aequalis * igitur eſt baſis ABCD baſi
* A. 5. EFGH. eſt igitur ut baſis ABCD ad baſim EFGH, ita MN altitudo ad altitudinem KL. non ſit autem altitudo KL altitudini MN aequalis, ſed major ſit MN, et auferatur ab ipſa MN altitudini KL aequalis MP, et per P ſecetur EO cylindrus plano TYS oppoſitis planis circulorum EFGH, RO parallelo; igitur, ſectio communis plani TYS et ſuperficiei cylindri EO erit circulus, et erit ES cylindrus cujus baſis quidem

quidem EFGH circulus, altitudo autem MP. Quoniam igitur AX cylindrus aequalis eſt cylindro EO, erit ut AX cylindrus ad cylindrum ES, ita cylindrus EO ad ES cylindrum[b]. ſed ut AX cylindrus ad cylin- b. 7. 5.
drum ES, ita baſis ABCD ad EFGH baſim[a]; cylindri enim AX, ES a. 11. 12.
eandem habent altitudinem; ut autem cylindrus EO ad ES cylindrum, ita MN altitudo ad altitudinem MP[c], nam cylindrus EO ſecatur plano c. 13. 12.
TYS oppoſitis planis parallelo. eſt igitur ut ABCD baſis ad baſim EFGH, ita altitudo MN ad MP altitudinem. aequalis autem eſt MP altitudo altitudini KL; quare ut baſis ABCD ad EFGH baſim, ita MN altitudo ad altitudinem KL. aequalium igitur cylindrorum AX, EO baſes et altitudines reciproce ſunt proportionales.

Sed cylindrorum AX, EO baſes et altitudines ſint reciproce proportionales, ſit ſcilicet ut ABCD baſis ad baſim EFGH, ita altitudo MN ad KL altitudinem. Dico AX cylindrum cylindro EO aequalem eſſe.

Primo, Sit baſis ABCD baſi EFGH aequalis; et quoniam ut baſis ABCD ad baſim FFGH, ita altitudo MN ad KL altitudinem, erit MN aequalis * ipſi KL, quare et cylindrus AX aequalis erit[a] cylindro EO. * A. 5.
ſed non ſit ABCD baſis aequalis baſi EFGH, et ſit ABCD major; et quoniam ut baſis ABCD ad baſim EFGH, ita altitudo MN ad KL altitudinem, erit MN major * KL; iiſdemque, ut prius, conſtructis, quoniam ut ABCD baſis ad baſim EFGH, ita altitudo MN ad KL altitudinem; quoniam vero altitudo KL aequalis eſt altitudini MP; erit ut ABCD baſis ad baſim EFGH, ita AX cylindrus ad cylindrum ES; eandem enim habent altitudinem[a]; ut autem MN altitudo ad altitudinem MP ſive KL, ita cylindrus EO ad ES cylindrum. eſt igitur ut AX cylindrus ad cylindrum ES, ita cylindrus EO ad ES cylindrum. cylindrus igitur AX cylindro EO eſt aequalis. ſimiliter autem et in conis. Q. E. D.

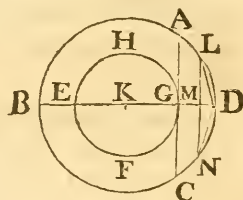
 PROP. XVI.

PROP. XVI. THEOR.

DUABUS circulis circa idem centrum exiſtentibus, in majori polygonum aequalium laterum, quorumque numerus par ſit, deſcribere, quod minorem circulum non attingat.

Sint dati duo circuli ABCD, EFGH circa idem centrum K. oportet in majori circulo polygonum aequalium laterum quorum numerus ſit par, deſcribere, non attingens minorem circulum.

Ducatur per K centrum recta linea BD, atque a puncto G ipſi BD ad rectos angulos ducatur GA, et ad C producatur; continget igitur AC
a. 16. 3. circulum EFGH [a]. itaque circumferentiam BAD bifariam ſecantes, et ejus dimidium rurſus bifariam, et hoc ſemper facientes, tandem relinquemus circumferentiam minorem
b. Lemma. ipſâ AD [b]. relinquatur ſitque LD; et a puncto L ad BD perpendicularis agatur LM, et ad N producatur; junganturque LD, DN.



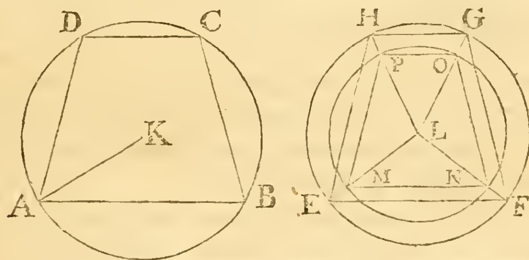
c. 3. 3. et 4. 1. aequalis igitur [c] eſt LD ipſi DN, et quoniam LN parallela eſt ipſi AC, et AC contingit circulum EFGH; ipſa LN circulum EFGH non tanget. et multo minus tangent circulum EFGH rectae lineae LD, DN. quod ſi ipſi LD aequales deinceps circulo ABCD aptabimus, deſcribetur in eo polygonum aequalium et numero parium laterum non attingens minorem circulum. Q. E. F.

LEMMA II.

LEMMA II.

SI duo trapezia ABCD, EFGH inſcripta ſint circulis quorum centra K L puncta, fuerint autem latera AB, DC ut et EF, HG parallela; reliqua autem quatuor AD, BC, EH, FG inter ſe aequalia; ſit autem AB latus majus latere EF. et DC majus HG. erit recta KA quae eſt ex centro circuli in quo majora ſunt latera, major ea LE quae eſt ex centro alterius circuli.

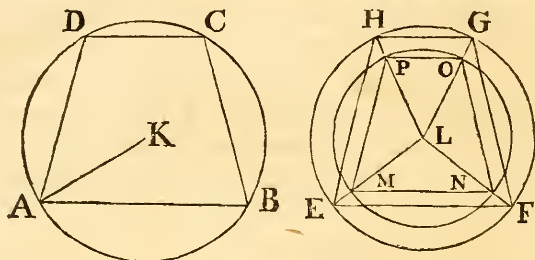
Non enim, ſi fieri poteſt, ſit KA major recta LE; erit igitur KA vel aequalis ipſi LE vel minor eâdem. ſit primo KA aequalis LE. quoniam igitur in aequalibus circulis rectae AD, BC aequales ſunt ipſis EH, FG, erunt circumferentiae AD, BC aequales circumferentiis EH, FG [a]; quoniam vero rectae AB, DC majores ſunt ipſis EF, HG, altera a. 28. 3.



alterâ, erunt circumferentiae AB, DC majores ipſis EF, HG. Ergo tota ABCD circumferentia major eſt tota EFGH; ſed et aequalis, quod fieri non poteſt. non igitur recta KA aequalis eſt ipſi LE.

Sed ſit KA minor LE, et ipſi KA aequalis ponatur LM, et centro L, intervallo LM deſcribatur circulus MNOP, qui junctis LF, LG, LH,

LH, LE occurrat in N, O, P, M; et jungantur MN, NO, OP, PM, b. 2. 6. quae ipſis EF, FG, GH, HE parallelae [b] et minores erunt; ſingulae ſingulis. quoniam igitur EH major eſt MP, erit et AD quam MP major, et aequales ſunt circuli ABCD, MNOP; major igitur eſt circumferentia AD circumferentiâ MP; eadem ratione circumferentia BC major eſt ipsâ NO; et quoniam recta AB major eſt rectâ EF quae ipſa MN major eſt, erit AB quam MN multo major. eſt igitur circumferentia AB major ipſa MN; eademque ratione DC circumfe-



rentia major eſt ipſa PO. tota igitur ABCD major eſt tota circumferentia MNOP, ſed et aequalis, quod fieri non poteſt. non igitur minor eſt KA ipsâ LE, ſed neque aequalis. Recta igitur KA ipsâ LE neceſſario eſt major. Q. E. D.

Cor. Et ſi fuerit triangulum iſoſceles cujus latera ipſis AD, BC aequalia ſunt, baſis autem minor AB majori ipſarum AB, DC; ſimiliter oſtendetur recta KA major eâ quae eſt ex centro circuli circa triangulum deſcripti.

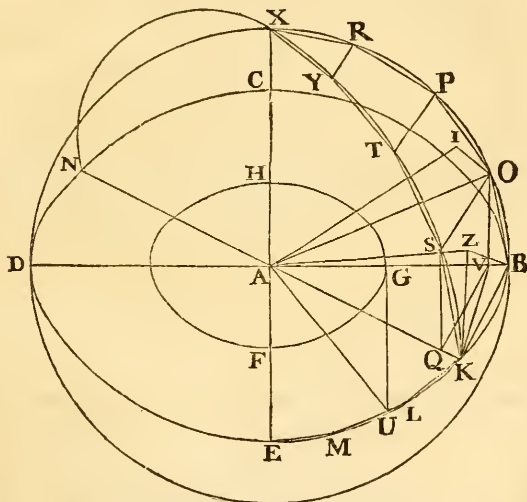
PROP. XVII.

PROP. XVII. THEOR.

DUABUS ſphaeris circa idem centrum exiſtentibus, in majori ſolidum polyedrum deſcribere, cujus ſuperficies minorem ſphaeram non attingat.

Intelligantur duae ſphaerae circa idem centrum A; oportet in majori ſphaera deſcribere ſolidum polyedrum cujus ſuperficies minorem ſphaeram non attingat.

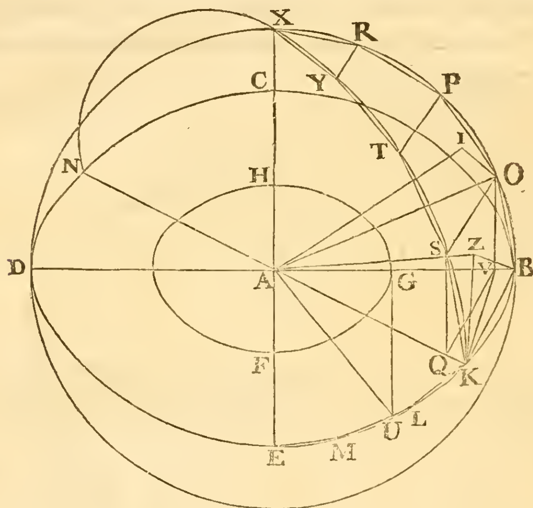
Secentur ſphaerae plano aliquo per centrum ducto; itaque ſectiones



erunt circuli; quoniam diametro manente et ſemicirculo circumducto ſphaera facta eſt; ergo in quacunque poſitione ſemicirculum intelligamus, quod per ipſum producitur planum in ſuperficie ſphaerae circulum

efficiet;

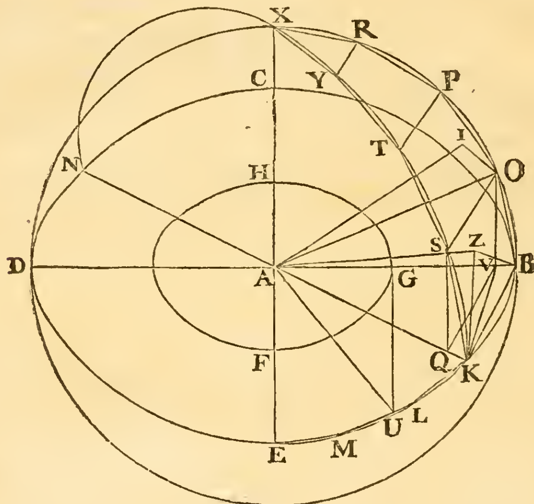
efficiet; et conſtat circulum eſſe maximum, quia diameter ſphaerae quae et circuli eſt diameter, major eſt omnibus rectis lineis quae in circulo
a. 15. 3. vel ſphaera ducuntur[a]. ſit igitur in majori quidem ſphaera circulus BCDE, in minori autem circulus FGH; et ducantur ipſorum duae diametri BD, CE ad rectos inter ſe angulos. et duobus circulis circa idem centrum exiſtentibus BCDE, FGH, in majori BCDE polygonum



b. 16. 12. aequalium et parium numero laterum deſcribatur[b], non attingens minorem circulum FGH; cujus latera ſint in BE circuli quadrante BK, KL, LM, ME, et juncta KA producatur ad N; et a puncto A plano circuli BCDE ad rectos angulos ducatur AX, quae ſuperficiei ſphaerae in puncto X occurrat; et per AX, et utramque ipſarum BD, KN plana ducantur, quae ex jam dictis in ſuperficie ſphaerae maximos circulos efficient. itaque efficiant, et ſint ſuper diametris BD, KN eorum ſemicirculi

circuli BXD, KXN. Quoniam igitur XA recta eſt ad planum circuli BCDE, erunt omnia plana quae per ipſam XA tranſeunt ad planum circuli BCDE recta[c], quare et ſemicirculi BXD, KXN recti ſunt ad illud planum. c. 18. 11. et quoniam ſemicirculi BED, BXD, KXN aequales ſunt, ſuper aequalibus enim ſunt diametris BD, KN, erunt et eorum quadrantes BE, BX, KX inter ſe aequales. quot igitur latera polygoni ſunt in quadrante BE, tot erunt et in quadrantibus BX, KX aequalia ipſis BK, KL, LM, ME. deſcribantur et ſint BO, OP, PR, RX; KS, ST, TY, YX, junganturque OS, PT, RY; et a punctis O, S ad rectas AB, AK perpendiculares ducantur OV, SQ. quoniam igitur planum BOXD rectum eſt ad planum BCDE, et in uno ipſorum BOXD ducta eſt OV perpendicularis ad AB communem planorum ſectionem, erit OV perpendicularis ad planum BCDE[d]. d. 4. Def. 11. eadem ratione SQ perpendicularis erit ad idem planum, quia planum KSXN ad rectos angulos eſt plano BCDE. Jungatur VQ, et quoniam in aequalibus ſemicirculis BXD, KXN aequales circumferentiae ſumptae ſunt BO, KS, et ductae perpendiculares OV, SQ ad circulorum diametros, erit OV quidem ipſi SQ aequalis, BV vero aequalis KQ. eſt autem et tota BA aequalis toti KA, ergo et reliqua VA reliquae QA eſt aequalis. ut igitur BV ad VA, ita KQ ad QA, ideoque VQ ipſi BK parallela eſt[e]. e. 2. 6. et quoniam utraque ipſarum OV, SQ recta eſt ad circuli BCDE planum, erit OV ipſi SQ parallela[f]; f. 6. 11. oſtenſa autem eſt et ipſi aequalis; ergo QV, SO aequales ſunt et parallelae[g]. g. 33. 1. et quoniam QV parallela eſt ipſi SO, ſed et parallela ipſi KB, erit et OS ipſi BK parallela[h]; h. 9. 11. ergo quae ipſas conjungunt BO, KS in eodem ſunt plano in quo parallelae OS, BK, et quadrilaterum KBOS in uno erit plano. ſi vero jungantur PB, TK, et a punctis P, T ducantur perpendiculares ad rectas AB, AK, oſtendetur recta TP parallela ipſi KB eodem prorſus modo quo oſtenſa eſt SO parallela eidem KB; quare [h] TP parallela eſt ipſi SO,

et propterea quadrilaterum SOPT in uno erit plano. eadem ratione quadrilaterum TPRY est in uno plano. est autem in uno plano fi-
i. 2. 11. gura YRX[i]. si igitur a punctis O, S, P, T, R, Y ad A ductas rectas lineas intelligamus, constituetur quaedam figura solida polyedra inter circumferentias BX, KX, ex pyramidibus composita, quarum bases quidem KBOS, SOPT, TPRY quadrilatera, et triangulum YRX, ver-



tex autem punctum A. si autem in unoquoque laterum KL, LM, ME quemadmodum in BK eadem construamus, et etiam in reliquis tribus quadrantibus, et in reliquo haemisphaerio; constituetur figura quaedam solida polyedra in sphaera descripta, et composita ex pyramidibus, quarum bases sunt quadrilatera jam dicta, et YRX triangulum, et quae ejusdem ordinis sunt, vertex autem A punctum. Dictae autem figurae polyedrae superficies non attinget minorem sphaeram in qua est circulus

lus FGH. Ducatur enim a puncto A ad planum quadrilateri KBOS perpendicularis AZ[k], cui in puncto Z occurrat, et BZ, ZK jungantur. k. 11. 11. itaque quoniam AZ recta est ad quadrilateri KBOS planum, et ad omnes rectas lineas quae ipsam contingunt et in eodem sunt plano rectos angulos faciet; ergo AZ ad utramque ipsarum BZ, ZK est perpendicularis. et quoniam AB est aequalis AK, et sunt quadrato quidem ex AB aequalia quadrata ex AZ, ZB; quadrato autem ex AK aequalia ex AZ, ZK quadrata*; ergo quadrata ex AZ, ZB, quadratis * 47. 1. ex AZ, ZK aequalia sunt. commune auferatur quadratum ex AZ, reliquum igitur quadratum ex BZ reliquo ex ZK est aequale; ideoque recta linea BZ rectae ZK aequalis. similiter ostendemus et quae a puncto Z ad puncta O, S ducuntur utrique ipsarum BZ, ZK aequales esse. circulus igitur centro Z, intervallo ZB descriptus per puncta K, O, S transibit, atque erit in circulo quadrilaterum KBOS. et quoniam KB major est quam QV, aequalis autem QV ipsi SO, erit et KB quam SO major. sed KB est aequalis utrique ipsarum BO, KS; quare unaquaeque aequalium circumferentiarum quas auferunt rectae KB, BO, KS, in circulo KBOS major est circumferentia quam aufert recta OS; ideoque tres illae circumferentiae una cum quarta uni ipsarum aequali majores sunt iisdem tribus una cum eâ quam aufert recta OS, hoc est totâ circumferentiâ; circumferentia igitur KB in circulo KBOS major est quarta parte totius circumferentiae KBOS circuli, et propterea angulus BZK ad centrum major est angulo recto. Quoniam igitur obtusus est angulus BZK, erit quadratum ex BK majus quadratis ex BZ, ZK[l], hoc est majus quam duplum quadrati ex BZ. Jungatur KV, l. 12. 2. et quoniam in triangulis KBV, OBV aequales sunt KB, BV ipsis OB, BV, et aequales continent angulos, erit KVB angulus angulo OVB aequalis[m]. rectus autem est OVB, rectus igitur est angulus KVB. et m. 4. 1. quoniam BD minor est quam dupla ipsius DV, erit rectangulum con-

 tentum

n. 8. 6. tentum DB, BV minus duplo rectanguli DVB, hoc eſt, erit [n] quadratum ex KB minus duplo quadrati ex KV. ſed quadratum ex KB majus eſt quam duplum quadrati ex BZ; ergo quadratum ex KV quadrato ex BZ eſt majus. et quoniam BA eſt aequalis AK, et quadrato quidem ex BA aequalia ſunt quadrata ex BZ, ZA, quadrato autem ex AK aequalia quadrata ex KV, VA, erunt quadrata ex BZ, ZA quadratis ex KV, VA, aequalia; quorum quadratum ex KV majus eſt quadrato ex BZ; ergo reliquum ex VA quadratum quadrato ex ZA eſt minus, ac propterea recta linea AZ major quam recta AV. multo igitur major eſt AZ quam AG, in Propoſitione enim praecedente oſtenſum eſt rectam KV cadere extra circulum FGH. atque eſt AZ quidem ad planum KBOS perpendicularis, et propterea minima eſt omnium

nium

nium quae ad planum illud a centro ſphaerae duci poſſunt. Planum igitur KBOS cadit extra minorem ſphaeram.

Reliqua etiam plana inter quadrantes BX, KX extra minorem ſphaeram cadere ita oſtendetur. Ducatur a puncto A ad planum quadrilateri SOPT perpendicularis AI, et IO jungatur. et, ut de plano KBOS et puncto Z oſtenſum fuit, eodem modo oſtendetur punctum I centrum eſſe circuli circa quadrilaterum SOPT deſcripti, et rectam OS majorem eſſe rectâ PT, et oſtenſa eſt PT parallela ipſi OS. Quoniam igitur trapezia KBOS, SOPT circulis inſcripta, habent latera BK, OS parallela, ut et OS, PT; reliqua autem BO, KS, OP, ST inter ſe aequalia; et eſt latus BK majus latere OS, et OS majus ipſo PT, erit recta ZB major recta IO[o]. Jungatur AO quae aequalis erit ipſi AB, o. 2. Lemma. et quoniam recti ſunt anguli AIO, AZB, erunt quadrata ex AI, IO aequalia quadrato ex AO ſive AB, hoc eſt quadratis ex AZ, ZB; et quadratum ex ZB majus eſt quadrato ex IO, reliquum igitur ex AZ quadratum quadrato ex AI eſt minus. recta igitur AZ minor eſt ipſa AI. oſtenſa autem eſt AZ major quam AG, multo igitur AI major eſt recta AG. Ergo planum SOPT cadit extra minorem ſphaeram. eadem ratione planum TPRY extra eandem ſphaeram cadere oſtendetur; ut et planum trianguli YRX, ope ſc. Corollarii Lemmatis 2. et ſimiliter reliqua omnia plana quibus continetur ſolidum polyedrum extra minorem ſphaeram cadere oſtendentur. Duabus igitur ſphaeris circa idem centrum exiſtentibus in majori ſolidum polyedrum deſcriptum eſt cujus ſuperficies minorem ſphaeram non attingit. Q. E. D.

Aliter autem et brevius ſine ope Prop. 16. oſtendetur recta AZ major ipsâ AG. Ducatur a puncto G ipſi AG ad rectos angulos GU et AU jungatur. itaque circumferentiam BE bifariam ſecantes, et dimidium ipſius bifariam, atque hoc ſemper facientes, tandem relinquemus quandam circumferentiam minorem circumferentia circuli BCDE

quae

quae ſubtenditur a recta aequali ipſi GU. relinquatur, ſitque circumferentia KB. minor igitur eſt recta linea KB quam GU. et quoniam angulus BZK eſt obtuſus, ut oſtenſum fuit, erit BK major quam BZ. ſed GU quam BK eſt major; multo igitur major eſt GU quam BZ, et quadratum ex GU quadrato ex BZ majus. eſt autem AU aequalis ipſi AB; ergo quadratum ex AU, hoc eſt quadrata ex AG, GU, aequale eſt quadrato ex AB, hoc eſt quadratis ex AZ, ZB; minus autem eſt quadratum ex BZ quadrato ex GU; reliquum igitur quadratum ex AZ majus eſt quadrato ex AG, et ob id recta linea AZ quam recta AG eſt major.

Cor. Si vero et in altera ſphaera deſcribatur ſolidum polyedrum ducendo ſc. rectas inter puncta in quibus rectae quae a centro ſphaerae ad omnes angulos ſolidi polyedri in majori ſphaera deſcripti, ſuperficiei minoris occurrunt, eodem ordine quo puncta quibus eaedem rectae ſuperficiei majoris ſphaerae occurrunt, rectis junguntur; habebit ſolidum polyedrum in ſphaera BCDE ad ſolidum polyedrum in altera ſphaera triplicatam rationem ejus quam diameter ſphaerae BCDE habet ad alterius ſphaerae diametrum. diviſis enim ſolidis in pyramides numero aequales, et ejuſdem ordinis; erunt pyramides ſimiles. etenim habent angulos ſolidos ad verticem, ſphaerae ſc. centrum, communes, reliquos
a. B. 11. vero angulos ſolidos ad baſes inter ſe aequales[a], quoniam continentur tribus angulis planis qui, ſinguli ſingulis, inter ſe ſunt aequales; eaedemque pyramides continentur ſimilibus planis multitudine aequalibus, et
b. 11. Def. 11. propterea ſimiles ſunt[b]. ſimiles autem pyramides inter ſe in triplicata ſunt
c. Cor. 8. 12. ratione homologorum laterum[c]. Ergo pyramis cujus baſis eſt KBOS quadrilaterum, vertex autem punctum A, ad pyramidem in altera ſphaera ejuſdem ordinis triplicatam rationem habet ejus quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc eſt quam habet AB ex centro ſphaerae majoris, ad eam quae eſt ex centro alterius ſphaerae. ſimiliter

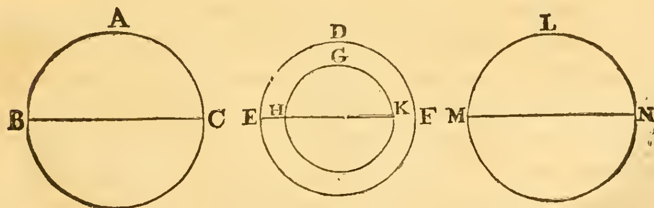
militer et unaquaeque pyramis earum quae ſunt in ſphaera majori ad unamquamque pyramidum ejuſdem ordinis quae ſunt in altera ſphaera, triplicatam rationem habet ejus quam habet AB ad eam quae eſt ex centro alterius ſphaerae. et ut unum antecedentium ad unum conſequentium, ita antecedentia omnia ad omnia conſequentia. Quare totum ſolidum polyedrum, quod eſt in ſphaera majori, ad totum ſolidum polyedrum quod in altera ſphaera, triplicatam rationem habet ejus quam habet AB ad eam quae eſt ex centro alterius ſphaerae, hoc eſt quam habet BD diameter ad alterius ſphaerae diametrum.

PROP. XVIII. THEOR.

SPHAERAE inter ſe in triplicata ſunt ratione ſuarum diametrorum.

Intelligantur ſphaerae ABC, DEF, quarum diametri BC, EF. Dico ABC ſphaeram ad ſphaeram DEF triplicatam habere rationem ejus quam habet BC ad EF.

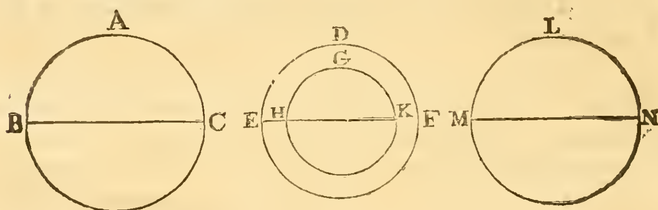
Si enim non habet, ſphaera ABC ad ſphaeram minorem ipſa DEF,



vel ad majorem, triplicatam rationem habebit ejus, quam habet BC ad EF*. habeat primo ad minorem, videlicet ad GHK; et intelligatur ſphaera

* Vid. ad hanc notam Prop. 2.

ſphaera DEF circa idem centrum, circa quod eſt ſphaera GHK; de-
a. 17. 12. ſcribaturque [a] in majori ſphaera DEF ſolidum polyedrum cujus ſuperficies non attingat minorem ſphaeram GHK; et in ſphaera ABC deſcribatur ſolidum polyedrum ſimile ei quod in ſphaera DEF deſcriptum eſt. ſolidum igitur polyedrum quod eſt in ſphaera ABC ad ſolidum polyedrum in ſphaera DEF, triplicatam rationem habet ejus quam
b. Cor. 17. 11. BC ad EF [b]. habet autem ABC ſphaera ad ſphaeram GHK triplicatam rationem ejus quam BC ad EF; ergo ut ABC ſphaera ad ſphaeram GHK, ita ſolidum polyedrum in ſphaera ABC ad ſolidum polyedrum in ſphaera DEF. major autem eſt ſphaera ABC ſolido polyedro



c. 14. 5. quod eſt in ipſa; ergo [c] et GHK ſphaera polyedro quod eſt in ſphaera DEF eſt major. ſed et minor, ab ipſo enim comprehenditur, quod fieri non poteſt. non igitur ABC ſphaera ad ſphaeram minorem ipſa DEF triplicatam rationem habet ejus quam BC habet ad EF. ſimiliter oſtendemus neque DEF ſphaeram ad ſphaeram minorem ipſa ABC triplicatam rationem habere ejus quam habet EF ad BC. Dico inſuper ſphaeram ABC neque ad majorem ſphaeram ipſâ DEF triplicatam rationem habere ejus quam BC ad EF. ſi enim fieri poteſt, habeat ad majorem LMN; invertendo igitur, ſphaera LMN ad ABC ſphaeram triplicatam rationem habet ejus quam diameter EF habet ad BC

BC diametrum. ut autem ſphaera LMN ad ABC ſphaeram, ita ſphaera DEF ad aliam quandam ſphaeram, quae quidem minor erit ſphaera ABC[c], quoniam ſphaera LMN major eſt ſphaera DEF. ergo et DEF ſphaera ad ſphaeram minorem ipsâ ABC, triplicatam rationem habet ejus quam EF ad BC; quod fieri non poſſe oſtenſum eſt. non igitur ABC ſphaera ad ſphaeram majorem ipsâ DEF triplicatam rationem habet ejus quam BC habet ad EF. oſtenſum autem eſt neque ad minorem. Ergo ABC ſphaera ad ſphaeram DEF triplicatam rationem habet ejus quam BC habet ad EF. Q. E. D.

c. 14. 5.

F I N I S.

N O T A E

CRITICAE ET GEOMETRICAE;

QUAE

Rationem reddunt eorum in quibus Editio haec differt a Textu Graeco Elementorum; inseruntur etiam eisdem paucae in quasdam Propositiones observationes.

AUCTORE

ROBERTO SIMSON, M.D.

In Academia Glasguensi Matheseos Professore.

GLASGUAE:

IN AEDIBUS ACADEMICIS
EXCUDEBANT ROBERTUS ET ANDREAS FOULIS
ACADEMIAE TYPOGRAPHI

M. DCC. LVI.

N O T A E &c.

Ad DEFINITIONEM VII. LIB. I.

LOCO Definitionis quae habetur in Graecis codicibus alia magis diſtincta poſita eſt, in qua continetur affectio planae ſuperficiei quae in Elementis manifeſte ponitur, rectam ſcilicet lineam duci poſſe a quovis puncto in plana ſuperficie ad quodvis in eâdem, quae tota ſit in ea ſuperficie.

Ad DEF. VIII. LIB. I.

Videtur eum qui hanc Definitionem poſuit voluiſſe angulum planum in genere definire, hoc eſt ut non ſolum angulus qui duabus rectis continetur, ſed et is quem aliqui concipiunt contineri rectâ linea et curvâ, vel duabus curvis lineis in plano ſibi mutuo occurrentibus, ſimul definiretur. quamvis autem ſenſus verborum ἐπ' εὐθείας, in directum, vel in recta linea, manifeſtus ſit quando duae rectae dicuntur in directum eſſe, non tamen apparet quo ſenſu intelligenda ſunt haec verba, quando recta linea et curva, vel duae curvae in directum eſſe dicuntur; certe hoc loco explicari non poteſt. veroſimile igitur eſt Definitionem hanc, et Definitionem anguli ſegmenti, ut et ea quae de angulo ſemicirculi, et ſegmentorum angulis habentur in Prop. 16. et 31. Lib. 3. additamenta eſſe Editoris minus periti. et ob hanc rationem Definitiones eae, praeſertim cum inutiles omnino ſint, notis inverſis commatis a reliquis diſtinguuntur.

Ad DEF. XVII. LIB. I.

Huic Definitioni adjecta ſunt ſequentia in omnibus exemplaribus

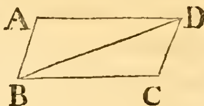
" quae

" quae quidem et bifariam circulum ſecat." haec autem omiſimus, non enim ſunt pars Definitionis, ſed Corollarium ex ea. Proclus id oſtendit concipiendo unum ex ſegmentis in quae diameter circulum dividit, altero applicari; manifeſtum enim eſt ea neceſſario ſibi mutuo congruere; ſi enim non congruerent, rectae a centro ad circumferentiam ductae non eſſent inter ſe aequales. idem etiam facile oſtenditur ex Prop. 31. Lib. 3. et Prop. 24. ejuſdem. ex prima enim harum ſequitur ſemicirculos ſimilia eſſe circuli ſegmenta; et ex altera ſegmenta haec aequalia eſſe.

Ad DEF. XXXIII. LIB. I.

Definitio haec affectionem continet ſuperfluam rei definitae; etenim omnis figura quadrilatera quae habet latera oppoſita inter ſe aequalia, habebit etiam angulos oppoſitos inter ſe aequales; et contra.

Sit enim in quadrilatero ABCD, latus AB aequale lateri CD, et latus AD ipſi BC; ductâ igitur BD, erunt AD, DB aequales ipſis CB, BD, et baſis AB baſi CD eſt aequalis. igitur ex Prop. 8. Lib. 1. erit angulus ADB angulo DBC aequalis; unde per Prop. 4. Lib. 1. erit angulus BAD aequalis ipſi BCD, et ABD ipſi BDC; et propterea angulus ADC aequalis angulo ABC.



Si vero angulus BAD aequalis fuerit angulo BCD, et angulus ABC angulo ADC; erunt et latera oppoſita inter ſe aequalia. Quoniam enim ex Prop. 32. Lib. 1. omnes anguli quadrilateri ABCD ſimul conficiunt quatuor rectos, quorum anguli BAD, ADC ſimul aequales ſunt ipſis BCD, ABC; erunt BAD, ADC ſimul aequales duobus rectis. parallelae igitur ſunt AB, CD ex Prop. 28. Lib. 1. ſimiliter, quoniam anguli DAB, ABC aequales ſunt duobus rectis, parallelae erunt AD, BC.

BC. parallelogrammum igitur eſt ABCD; quare oppoſita ejus latera ſunt inter ſe aequalia ex Prop. 34. Lib. 1.

Omiſſa igitur eſt altera ex hiſce affectionibus in Def. 33. Lib. 1.

Ad PROP. VII. LIB. I.

Demonſtratio hujus duos habet caſus, quorum is qui omiſſus eſt pariter eſt neceſſarius ac ille qui ſolus habetur in textu Graeco. caſum autem omiſſum primitus fuiſſe in textu, ex hoc manifeſtum eſt, quod ſecunda pars Prop. 5. Lib. 1. quae ſcilicet neceſſaria eſt demonſtrationi caſus omiſſi, nullius ſit uſus niſi ad hanc demonſtrationem; nam clare ſequitur haec pars, ex prima et Prop. 13. Lib. 1. addita igitur fuit gratia cujuſdam Propoſitionis inter 5. et 13. nulla autem harum eâ indiget praeter 7. hujus igitur gratia poſita fuit. verſio etiam ex lingua Arabica hunc caſum explicite demonſtratum habet. et Proclus agnoſcit ſecundam partem Prop. 5. additam fuiſſe gratia Prop. 7. ob ridiculam tamen rationem, "ut ſc. reſponſio fiat inſtantiis contra ſeptimam et decimam ſextam Propoſitionem Lib. 1." quaſi caſus omiſſus, ut ille exiſtimat, inſtantia eſſet contra Propoſitionem ipſam. Vide ſi lubet Proclum in Prop. 5. et 7. nam piget nugas ejus referre.

Praeterea enuntiationem Prop. 7. mutavimus, ejuſdem ſenſu omnino retento. qui enim ex Graecis verbum de verbo reddunt, faciunt eam tyronibus intellectu difficilem.

Ad PROP. XI. LIB. I.

Huic Propoſitioni Corollarium additum eſt, quod in Prop. 1. Lib. 11. et alias, neceſſarium ſit.

Ad PROP. XX. et XXI. LIB. I.

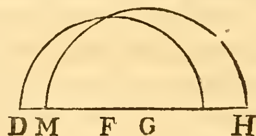
Refert Proclus in Commentariis in hanc Propoſitionem Epicureos

eam.

eam impugnasse, utpote asino notam, nullaque demonstratione egentem; ipsisque respondit quamvis duo latera trianguli reliquo majora esse, sensui manifestum sit, quomodo vero hoc fiat dicere ad scientiam spectat. vera autem responsio huic objectioni contra hanc et sequentem, aliasque quasdam Propositiones, haec est, numerum axiomatum sine necessitate minime augendum esse. Clarissimus autem Dominus Clairault qui in Praefatione suis Geometriae Elementis, Parisiis Ann. 1741. editis, praefixa, refert Euclidem operam dedisse ut ostendat duo latera trianguli altero triangulo inclusi simul minora esse lateribus ejus qui ipsum includit, oblitus est addere hanc conditionem, viz. si triangula sint super eâdem basi; sine hac enim possunt latera trianguli altero inclusi simul majora esse hujus lateribus in data quacunque ratione, quae minor sit quam dupla; ut demonstratum est a Pappo Alexandrino in Prop. 3. Lib. 3. Collect. Mathem.

Ad PROP. XXII. LIB. I.

Quidam culpant Euclidem quod non ostendat circulos, in constructione hujus Problematis descriptos, sibi mutuo occurrere. perspicuum autem hoc est ex determinatione quam dedit, viz. debere duas ex rectis DF, FG, GH reliquâ majores esse quomodocunque sumptas. Quis enim tyro adeo hebes est ut non ex hac videat circulum, centro F, intervallo FD, descriptum, occurrere rectae FH inter F et H, quoniam



FD minor est FH; et similiter circulum centro G, intervallo GH vel GM descriptum, occurrere rectae DG inter G et D; ipsosque sibi mutuo occurrere, quod FD, GH, simul majores sunt reliquâ FG? et quidem determinatio haec simplicior est eâ quam, ex hac deductam, loco ejus posuit Thomas Simpson in Elementis suis Geometriae pag. 49.

ut

ut hanc quam culpat Euclidis omiſſionem ſuppleret, nempe debere unam quamlibet ex tribus rectis minorem eſſe ſummâ, at majorem exceſſu reliquarum; ex qua circulos ſibi mutuo occurrere in uno caſu oſtendit, in alio quovis caſu dicit idem eodem modo oſtendi poſſe; verum recta GM quam jubet auferre ex recta GF poteſt ipsâ GF major eſſe, ut in figura hic appoſita, in quo caſu demonſtratio ejus in aliam mutanda eſt.

PROP. XXIV. LIB. I.

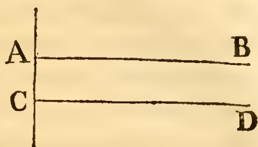
Huic, prope initium, adjecimus verba "rectarum enim DE, DF " ſit DE ea quae non major eſt quam DF;" hoc eſt ſumatur ea rectarum DE, DF quae non major eſt alterâ, ad conſtituendum cum ea angulum EDG aequalem ipſi BAC; etenim ſine hac cautione tres eſſent caſus diverſi hujus demonſtrationis, ut Campanus aliique faciunt.

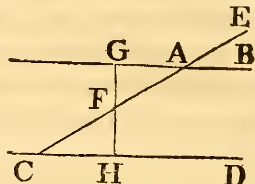
PROP. XXIX. LIB. I.

Propoſitio quae vulgo Poſtulatum 5^{tum}, aut Axioma 11^{mum}, a quibuſdam 12^{mum} dicitur, ex qua haec 29na praecipue pendet, haud parum negotii tum veteribus tum recentioribus Geometris praebuit. et quidem inter communes ſententias ſive Axiomata non ponenda videtur, non enim per ſe manifeſta eſt; ſed neque demonſtrationem, ſtricte loquendo, admittit; explicatione autem quadam indiget, ut dilucidior fiat. et hanc, viâ qua poſſumus facillima, Tyronibus ut ſequitur exponemus.

Primo facile poteſt quiſpiam concipere duas rectas AB, CD, in eodem plano, quae eidem rectae AC ad rectos ſunt angulos, aequidiſtantes quoque eſſe, i. e. nullibi ad ſe invicem accedere, vel a ſe invicem recedere, quantumvis producantur; vel potius nullus eſt qui aliter de hiſce

rectis concipere potest. etenim una ipsarum AB non potest concipi vergere vel minimum versus alteram CD, ni simul concipiatur AB magis inclinari versus partes rectae AC ad quas est CD, quam versus partes contrarias; quod fieri non potest, recta enim AB ad rectos angulos est ipsi AC. idemque dicendum est de duabus quibusvis rectis AB, CD quae cum aliqua recta EAC aequales angulos EAB, ECD ad easdem partes continent; nam hae cuidam rectae sunt ad rectos angulos. secetur enim AC bifariam in F, et ducatur FG perpendicularis ad AB, occurratque rectae CD in H. quoniam igitur in triangulis AFG, CFH, anguli GAF, AFG ipsis HCF, CFH sunt aequales, alter alteri, ex hypothesi et Prop. 15. Lib. 1. et latus AF aequale est lateri FC, erit AGF angulus aequalis ipsi CHF, ex Prop. 26. Lib. 1. rectus autem est AGF, quare et CHF rectus est. igitur rectae BG, DH ad rectos sunt angulos eidem rectae GH.



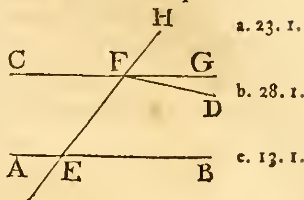


Secundo, liquido patet duas rectas ab eodem puncto exeuntes, a se invicem magis et magis divaricare seu divergere, ita ut distantia earum minima, inter finem unius et alteram rectam, fiat datâ quavis major. in longitudine enim ex. gr. decem pedum, sumpta in una rectarum a puncto a quo exeunt, si distantia ipsarum sit unius pedis, productâ rectâ in alios decem pedes, distantia ipsarum augebitur alio pede, eadem ratione qua in prima longitudine; et ita magis et magis. pendet autem hoc ex natura seu definitione rectae lineae quae eandem semper servat directionem, et ex praecedentibus stricte demonstrari non potest.

Hisce praemissis, sint duae rectae lineae AB, FD, ipsasque secet alia recta

recta EFH quae faciat angulos interiores et ad eaſdem partes, ipſos ſc. BEF, EFD ſimul minores duobus rectis; convenient inter ſe AB, FD ad partes B, D ad quas ſc. anguli ſunt minores duobus rectis.

Ad punctum enim F in recta FH angulo interiori BEF aequalis conſtituatur [a] angulus exterior GFH ad eaſdem partes rectae FH. a. 23. 1. igitur ex praemiſſis rectae parallelae EB, FG [b], aequidiſtantes ſunt. b. 28. 1. et quoniam anguli HFG, GFE ſimul aequales ſunt duobus rectis [c], c. 13. 1. erunt anguli BEF, EFG ſimul duobus rectis aequales. anguli autem BEF, EFD ſimul minores ſunt duobus rectis; quare angulus EFG major eſt angulo EFD, et cadet FD inter aequidiſtantes ſeu parallelas rectas EB, FG. productae autem FG, FD quae ab eodem puncto F exeunt, a ſe invicem tandem diſtabunt magis quam rectae aequidiſtantes FG, EB; et propterea recta FD erit tandem ad partes ipſius EB contrarias iis ad quas eſt punctum F, hoc eſt conveniet cum ipſa EB.



PROP. XXXV. LIB. I.

Demonſtratio hujus mutata eſt in aliam, quoniam tres eſſent caſus ſeorſim demonſtrandi, ſi argumentum quo auctor ejus utitur adhiberetur, qui quidem caſus habentur in verſione ex Arabica lingua; in Elementis enim nulli caſus qui diverſas requirunt demonſtrationes, omittendi ſunt. aliam igitur viam inivimus, quam primus, quantum ſcio, oſtendit Dominus Clairault in Elementis ſuis Geometriae, pag. 21. eandem poſtea dedit Thomas Simpſon in Elementis ſuis pag. 32. hic autem adhibet Prop. 26. Lib. 1. Euclidis ex qua ſola, aequalitas triangulorum non ſequitur, nam adhibenda etiam eſt Prop. 4. Lib. 1. ut

in ſimili prorſus caſu factum videmus in Prop. 34. Lib. 1. Elem. melius igitur eſt uti ſolâ quarta.

PROP. XLV. LIB. I.

Prope finem demonſtrationis recta KM parallela oſtenditur rectae FL, ope Prop. 33. eſt autem KH ex conſtructione parallela ipſi FG, et oſtenſae fuerunt KHM, FGL rectae lineae. adjectum eſt Corollarium ex Commandino, quod ſaepius uſui ſit.

PROP. XIII. LIB. II.

PRopositio haec enunciatur ſolummodo de triangulis acutangulis, quamvis vera ſit de omni triangulo. adjecta igitur eſt Demonſtratio in reliquis caſibus; Commandinus et Clavius ſuas etiam dederunt.

PROP. XIV. LIB. II.

In Demonſtratione hujus aliquis inepte interpoſuit "ſin minus, una "ipſarum BE, ED major eſt; ſit BE major et producatur ad F," quaſi aliquod interſit ſive major, ſive minor earum producta fuerit. vice igitur horum ſolummodo legendum eſt "ſin minus, producatur BE ad F."

PROP. I. LIB. III.

AUctores quidam, praeſertim inter recentiores, contra Demonſtrationes Apogogicas ſive indirectas nimis ſevere, et quidem imperite diſputant, non animadvertentes quaedam eſſe quae alia viâ demonſtrari non poſſunt. atque hujus rei Propoſitio haec exemplum eſt maxime evidens. directa enim ejus demonſtratio afferri minime poteſt.

nam

nam praeter circuli Definitionem, nullum eſt principium de circulo ex quo Demonſtrationem ſive directam ſive indirectam conficere licet. ex hac propterea Definitione, et Propoſitionibus ante demonſtratis, neceſſe omnino eſt oſtendere punctum in Conſtructione inventum centrum eſſe circuli. Quoniam igitur in demonſtratione utendum eſt hac Propoſitione, ſc. rectae lineae a centro ad circumferentiam ductae ſunt inter ſe aequales, atque non licitum ſit aſſumere punctum in conſtructione inventum centrum eſſe, hoc enim demonſtrandum eſt; manifeſtum eſt punctum aliud tanquam centrum aſſumendum eſſe. et ſi ex hoc aſſumpto abſurdum aliquod ſequatur, ut quidem Euclides ſequi oſtendit, tum verum non eſt punctum aſſumptum centrum eſſe; et cum utcunque aſſumptum fuerit, ſequitur nullum, praeter inventum in conſtructione punctum, centrum eſſe. unde neceſſitas demonſtrationis indirectae, ſive ab abſurdo patet.

PROP. XIII. LIB. III.

Quoniam multo facilius eſt imaginari duos circulos poſſe ſe mutuo intus contingere in pluribus punctis quam uno, ad eaſdem eorum partes, quam ad contrarias; igitur figura hujus caſus minime omittenda fuit. ei autem figurae, conſtructio quae in textu Graeco habetur minus apta fuiſſet, centra enim circulorum prope eorum circumferentias ponenda eſſent. alia igitur conſtructio et demonſtratio tradita eſt, ea ſcilicet quae eſt pars poſterior ejus quam Campanus ex codicibus Arabicis dedit. nam ſine ratione demonſtratio apud eum in duas partes diviſa eſt.

PROP. XV. LIB. III.

Deeſt converſa partis ſecundae hujus Propoſitionis, quamvis in praecedente, in caſu ſimili, converſa enuntiatur et demonſtratur; haec igitur converſa

conversa addita est. praeterea in demonstratione primae partis, diameter AD (in figura Commandini) major ostenditur rectâ BC ope rectae MN, cum immediate sine hac ostendi potest. alia igitur demonstratio posita est similis ei quâ Euclides utitur in praecedente 14. et eadem quam Theodosius tradit in Prop. 6. Lib. 1. Sphaericorum, in casu omnino simili.

PROP. XVI. LIB. III.

In hac verum sensum Propositionis dedimus sine mentione facta anguli semicirculi, aut ejus quem aliqui concipiunt contineri a circumferentia et contingente, de quibus angulis Clavius, Peletarius aliique recentiores multum inter se contenderunt, et ab iisdem paradoxa satis mira deduxerunt, quibus nullum fundamentum praebet enuntiatio nunc tradita. similiter nihil de angulo segmenti majoris, vel minoris diximus in Prop. 31. hujus Libri; sed sensum Propositionis sine iis enuntiavimus; et haec quidem adulterina esse non temere suspicari aliquem posse affirmat Vieta in pag. 386. Oper. Math.

PROP. XVII. LIB. III.

Huic casum addidimus in quo punctum datum a quo ducenda est recta linea circulum contingens, est in circuli circumferentia.

PROP. XX. LIB. III.

Verba ad initium secundae partis hujus demonstrationis, "κεκλάσθω "δὴ πάλιν" scilicet BDC, male vertuntur a Briggio et Gregorio "Rursus "inclinetur," debent enim verti, ut a Commandino, "Rursus inflecta-"tur." inflecti autem dicitur recta linea ad lineam, sive rectam sive curvam, quando a puncto ad lineam illam ducta est recta linea, et a puncto occursus ad aliud punctum ducta est recta linea angulum faciens cum

cum priore; ut ex Prop. 90. Datorum manifeſtum eſt; ita enim tota linea inter punctum primum et ultimum inflexa ſive fracta eſt ad punctum occurſus ſive inflexionis. ſimili ſenſu duae rectae lineae inflecti dicuntur a duobus punctis ad tertium punctum, quando angulum faciunt ad punctum hoc; ut in deſcriptione Locorum planorum Apollonii in Praefatione Pappi Alexandrini ad Librum ſuum ſeptimum videri poteſt. Pleniorem autem reddidimus hanc locutionem ex Prop. 90. Datorum.

PROP. XXI. LIB. III.

Hujus Propoſitionis duo ſunt caſus, quorum ſecundus in quo ſc. anguli ſunt in ſegmento minore ſemicirculo, in textu Graeco non habetur. hujus igitur demonſtratio addita eſt ſimplicior eâ quam Commandinus dedit, utpote ex primo tantum caſu ſine ope triangulorum derivata.

PROP. XXIII. et XXIV LIB. III.

In Propoſitione 24. oſtenditur ſegmentum AEB (vid. figuram Commandini) non poſſe non congruere ſegmento CFD, et ſitum diverſum ab eo habere ut CGD, occurrentibus circumferentiis ſibi mutuo in tertio puncto G, ex eo quod circulus circulum ſecaret in pluribus quam duobus punctis. verum hoc fieri non poſſe oſtendi debuit in Prop. 23. aeque ac unum ex ſegmentis non poſſe intra alterum cadere. hoc igitur ex Prop. 24. ſublatum eſt, et, in proprio ſuo loco, in Prop. 23. repoſitum.

PROP. XXV. LIB. III.

Haec divisa est in tres casus, quorum duo eandem constructionem et demonstrationem habent; eam igitur in duas tantum divisimus.

PROP. XXXIII. LIB. III.

Et Propositio haec in textu Graeco divisa est in tres casus, quorum duo, is scilicet in quo angulus datus est acutus, et is in quo est obtusus, eandem omnino et constructionem et demonstrationem habent; ultimam igitur demonstrationem tanquam superfluam, et imperiti cujusdam additamentum, ex Elementis sustulimus. Praeterea demonstratio casus in quo angulus datus est rectus, inscite per ambages facta est, quam propterea in simpliciorem, cum Clavio, mutavimus.

PROP. XXXV. LIB. III.

Ut Propositio 25. et 33. in plures, sic haec 35. in pauciores casus quam oportuit dividitur. neque putandum est Euclidem eos propter ipsorum simplicitatem omisisse; dedit enim omnium facillimum, eum scilicet in quo utraque recta per centrum transit. et in sequente Prop. 36. separatim demonstrat casum in quo recta transit per centrum. Theon igitur, ut videtur, eos brevitatis gratia sustulit, quod minime in institutione elementari faciendum, ut antea monitum. Casus igitur omissos, quos et praebent versiones ex Arabico, additi sunt.

PROP. XXXVII. LIB. III.

Verba ad finem hujus, viz. "similiter demonstrabitur et si centrum "sit in AC" deleta sunt, utpote inscite a quodam Editore addita.

Ad

Ad DEFINITIONES quaſdam LIB. IV.

QUANDO punctum aliquod exiſtit in recta, aut alia quavis linea, punctum illud apud Geometras Graecos ἅπτεσθαι, tangere, dicitur lineam eam. et quando recta aut circulus circulo quovis modo occurrit, alter alterum ἅπτεσθαι dicitur. quando vero recta aut circulus occurrit circulo, ita ut ipſum non ſecet, dicitur ἐφάπτεσθαι, contingere circulum. et hiſce verbis nunquam promiſcue utuntur. igitur in Definitione 5. Lib. 4. legendum eſt ἐφάπτηται, contingit, loco ſimplicis ἅπτηται. et in Definitionibus 1, 2, 3, et 6ta in verſione Commandini legendum eſt "tangit" loco verbi "contingit." et in Definitione 2. et 3. Lib. 3. eadem mutatio facienda eſt. at in textu Graeco Propp. 18, 19. Lib. 3. verbum ſimplex mutandum eſt in compoſitum.

PROP. IV. LIB. IV.

Circulum rectas lineas contingere in hac, ut et in Propp. 8. et 13. hujus Libri ex abſurdo oſtenditur, cum tamen idem in Propp. 17. 33. 37. Lib. 3. directe oſtendatur; hanc igitur viam ſecuti ſumus in hiſce Propoſitionibus hujus Libri, praeſertim cum brevior ſit.

PROP. V. LIB. IV.

Demonſtratio hujus a quodam vitiata eſt, non enim oſtendit rectas quae latera trianguli bifariam et ad rectos angulos ſecant, inter ſe convenire; et inepte dividit Propoſitionem in tres caſus, cum una eademque conſtructio et demonſtratio omnibus inſerviat, ut Campanus obſervavit; repetitiones igitur has omiſimus. textus etiam Graecus in Corollario hujus manifeſte vitiatus eſt, nam in eo mentio facta eſt dati anguli; nihil autem in Propoſitione habetur, vel haberi poteſt de angulo dato.

PROP. XV. et XVI. LIB. IV.

In Corollario primae harum desunt voces "aequilatero et aequian-"gulo" in textu Graeco. et in Prop. 16. habetur circulus vice circumferentiae, ubi dicitur "quarum igitur partium est ABCDF circu-"lus."

DEF. III. LIB. V.

RECENTIORUM multi Definitionem hanc tanquam minime probam rejiciunt. fuse eam explicavit vir doctissimus Isaacus Barrow in fine Lect. 3. anni 1666, et, quantum ex natura rei fieri potuit, objectiones contra eam diluit, atque ita sententiam suam in epilogo ejusdem lectionis exponit.

"Nunc tantum adjiciam Elementatori hac in Definitione condenda "non aliud forsan propositum fuisse, quam ut methodi plenioris aut "ornatûs qualiscunque causâ, praeludens scilicet accuratioribus istis e-"jusdem, majoris, et minoris rationis Definitionibus mox subjungen-"dis, generalem quandam et ὁλοσχερῆ τῦ λογῦ, ideam discentium in-"sinuaret animis per Metaphysicam hanc Definitionem; Metaphysi-"cam dico, nec enim proprie Mathematica est, cum ab ea nihil quic-"quam dependeat, aut deducatur in Mathematicis, nec ut existimo "deduci possit. cujusmodi quoque censeri potest posthac tradita Defi-"nitio Analogiae, Analogia est rationum similitudo, quae nulli Ma-"thematico deserviat usui, nec alio opinor fine proponitur, quam ut "per eam generalis quaedam analogiae notio, crassa licet et confusa, "Tyronibus indatur. Definitionibus autem exquisitis Mathematicis mox "ab illo subjunctis tota rationum Doctrina, tota res Mathematica sub-"nititur; ad illas igitur potissimum attendi debet, per illas rationum doc-"trina perfectius elucescit; haec et consimiles absque notabili Mathe-

"scos

" ſcos detrimento prorſus omitti poſſent. ſicut in Elem. 7. factum vide-
" mus, ubi numerorum analogia deſinitur et pertractatur, nullâ tamen
" rationis numero competentis exhibitâ deſinitione, quamvis illic aeque
" neceſſaria fuit et utilis deſinitio talis atque hic eſt; ſed neutro loco
" magna fuit neceſſitas. quamquam haud credo rem ipſam adeo gene-
" ralem et abſtractam, eoque conceptu magis arduam et explicatu, defi-
" nitionis eſſe capacem commodioris hâc quam Elementator aſſignavit,
" quam ideo viſum eſt uberius explicare; neque non ab oppugnantium
" captionibus aſſerere." Quibus quidem nihil addendum video, praeterquam quod hiſce rationibus de inutilitate hujus et ſequentis 8vae Definitionis perſuaſus, firmiter credam eas non Euclidis eſſe, ſed cujuſdam minus periti Editoris.

DEF. XI. LIB. V.

Verbum "deinceps" neceſſario addendum fuit ante verbum "pro-
" portionales" in hac definitione; et ita citata habetur in 33. Prop. Lib. 11.

Poſt hanc Definitionem ponenda fuit, ut in loco proprio, Definitio rationis compoſitae, cujus ſpecies ſunt ratio duplicata, triplicata &c. quae in hac et praecedente definiuntur. eam autem rejecit Theon in Def. 5. Lib. 6. ubi rationis compoſitae Definitionem inutilem omnino et abſurdam tradit. aliam igitur ejuſdem inter Def. 11. et 12. poſuimus, quam, ſine dubio, dedit Euclides, citat enim eam explicite in Prop. 23. Lib. 6. quamque tradunt Clavius, Herigonius et Barrovius, retentâ etiam Theonis Definitione, quam ex Elementis ſuſtuliſſe debuerunt.

DEF. XIII. LIB. V.

Haec et ſequentes terminorum quorundam, qui in Lib. 5. et ſe-

 quentibus

quentibus occurrunt, explicationem continent, qui quidem, paucis exceptis, ex ipsis Propositionibus hujus libri in quibus primò utuntur satis innotescunt; a Theone vel alio quodam additae videntur hae Definitiones. Utut sit, eas paulo distinctius tradere, Tyronum gratia, visum est.

PROP. IV. LIB. V.

In constructione, demonstrationi hujus praemissa, verba ἅ ἔτυχε, utcunque, bis omittuntur in textu Graeco, et versione Latina; addita igitur sunt, utpote omnino necessaria.

Ibid. in demonstratione; in textu Graeco, et in versione Latina Commandini, et in ea Henrici Briggii quae prodiit Londini anno 1620, una cum textu Graeco priorum sex Librorum, quamque in hoc loco sequitur David Gregorius in sua editione operum Euclidis, sequentia habentur, viz. " sumptae autem sunt ipsarum A, C aeque multiplices " K, L; et ipsarum B, D aliae (ἅ ἔτυχε) utcunque aeque multiplices " M, N;" quae quidem minime vera sunt. delendum igitur fuit verbum " utcunque." mirum autem est neque Briggium qui verbum hoc recte omisit in uno loco Prop. 13. hujus Libri, neque Gregorium qui idem verbum mutavit in " quaedam" vel ipsum omisit in quatuor locis ejusdem Prop. 13. idem non omisisse in hoc loco Prop. 4. et in secundo loco in quo habetur in Prop. 17. hujus, in quibus, salva veritate, manere non potest. in nullo autem ex his locis verba ἅ ἔτυχε è textu Graeco deleverunt Editores, ut fecisse debuerunt.

Occurrunt eadem verba in quatuor locis Prop. 11. hujus, in quorum primo et ultimo necessaria sunt, at in secundo et tertio, quamvis vera, sunt tamen superflua; ut etiam sunt in secundo loco in quo habentur eadem verba in Prop. 12. hujus.

COR.

COR. PROP. IV. LIB. V.

Corollarium hoc ab imperito quodam additum eſt vice legitimae demonſtrationis quam Theon aliuſve Editor non ex hoc, ſed proprio ſuo loco in hoc libro ſine dubio ſuſtulit. volebat enim auctor Corollarii hujus oſtendere magnitudines proportionales E, G, F, H etiam inverſe proportionales eſſe, ſc. G eſſe ad E, ut H ad F; quod quidem verum eſt, minime autem ex hac Propoſitione vel ejuſdem demonſtratione dependet. Cum enim dicit "Quoniam igitur demonſtratum eſt, ſi K ſuperat M, et L "ipſam N ſuperare" &c. Oſtenſum quidem hoc eſt in demonſtratione Propoſitionis, non tamen ex eo quod proportionales ſint E, G, F, H, hoc enim eſt concluſio ipſius Propoſitionis. Quare illud "Quoniam "igitur demonſtratum eſt" &c. omnino ineptum eſt. Oſtendiſſe enim debuit ſi K ſuperat M, et L ipſum N ſuperare, ex hypotheſi quod E, G, F, H ſunt proportionales, et Def. 5. hujus Libri, quod quidem minime oſtendit; habetur autem hoc in Prop. B. quam loco proprio poſuimus vice hujus Corollarii. et Corollarium aliud Prop. 4^{tae} additum eſt neceſſarium quidem Demonſtrationi Prop. 18. hujus libri, aliaſque non raro utile, cujus demonſtratio continetur in ea Propoſitionis.

PROP. V. LIB. V.

In conſtructione, demonſtrationi hujus praemiſsâ, quae habetur in textu Graeco, ejuſque verſionibus Latinis, requiritur ut quotuplex eſt AE ipſius CF, totuplex ſiat EB ipſius CG, hoc eſt requiritur ut EB ſecetur in tot partes aequales quot ſunt in AE aequales ipſi CF. ex hoc autem manifeſtum eſt conſtructionem hanc non eſſe Euclidis. non enim docet Euclides quomodo ſecari poſſint rectae lineae, nedum aliae magnitudines, in partes aequales, antequam ad Prop. 9. Lib. 6. veniat.

A E B G C F D

nunquam

nunquam autem in constructione jubet aliquid fieri, quod facere non prius docuerat. Constructionem igitur mutavimus in eam quam sine dubio Euclides dederat, in qua nihil requiritur praeterquam quod magnitudo sibi ipsi aliquoties addatur. et haec quidem habetur in versionibus ex Arabica lingua, quamvis in iisdem enuntiatio Propositionis, ejusque demonstratio foede depravata sint. Jacobus etiam Peletarius, qui primus, quantum scio, errorem hunc observavit, legitimam constructionem dedit in Euclide suo, postquam erroneam dederat, quam dicit se omittere noluisse, quod subtilis sit et ad similes reperiendas ingenium acuat; cum revera nulla sit inter demonstrationes differentia nisi in constructione, quam quidem ab imperito Librario ortam esse admodum verisimile videtur. Clavius etiam et vulgarem et legitimam constructionem tradit, non tamen observavit, ut neque Peletarius, rationem propter quam una alteri praeferenda sit.

PROP. VI. LIB. V.

Hujus duo sunt casus, quorum prioris tantum, qui magis simplex est, demonstratio in Graecis habetur. et verisimile est Theonem existimasse satis fuisse hunc tradere, cum neuter eorum alicui demonstrationi inserviret in mutilata ejus editione Lib. 5ti; et eodem jure alterum casum, ut et Propositionem quintam omisisse potuisset. alterius autem demonstratio addita est, uterque enim, ut et Prop. 5. necessarius est demonstrationi Prop. 18. hujus libri. Versiones etiam ex Arabica lingua breviter praebent utrumque casum.

PROP. A. LIB. V.

Propositione hâc saepissime utuntur Geometrae, et in 25. hujus Libri, 31. Lib. 6. 34. Lib. 11. et 15. Lib. 12. adhibetur; a Theone autem ex Elementis sublata videtur, quoniam satis evidens apparebat

parebat ei aliiſque qui confuſaneam et indiſtinctam proportionalium ideam apud vulgus receptam, ſubſtituunt loco accuratae ideae quae ex Definitione 5. Lib. 5. habetur. neque dubium eſt Eudoxum vel Euclidem qui hâc nihilo difficiliores 7^{timam} ſc. et 9^{am} hujus Libri demonſtratione munivit, etiam huic in Elementis locum dediſſe.

Ex ea autem Alphonſus Borrellius anſam arripuit graviter, ſed iniquiſſime culpandi Definitionem 5. hujus Libri. en ejus verba in pag. 126. Euclidis ſui reſtituti Edit. Piſis 1658, "Nec demum haec minima cognitio ex dicta proprietate" quae ſc. continetur in Def. 5. 5. "colligi poteſt, quod ſcilicet, ſi quatuor magnitudines ſint proportionales, cum prima excedit ſecundam, neceſſario tertia magnitudo quartam ſuperare debet; quod Clavius confitetur in 16. Prop. Lib. 5. Elementorum." Clavius autem hoc diſertis verbis non confitetur, ſed occaſionem dedit Borrellio haec de ſe ſcribendi, cum in loco citato Clavius Commandinum reprehendat, et quidem recte, quod Propoſitionem hanc ex Prop. 16. Lib. 5. demonſtret, neque tamen ipſe Clavius aliquam ejus demonſtrationem tradat, ſed eam perſpicuam eſſe putet ex natura proportionum, ut loquitur in fine Prop. 14. et 16. 5. ſuae editionis, et eum ſequitur Petrus Herigonius in ſchol. 1. Prop. 14. Lib. 5. quaſi aliqua eſſet natura proportionalium prior eâ quae ex ipſarum Definitione intelligenda eſt. et quidem, quamvis demonſtratio Propoſitionis admodum ſit facilis, nullus tamen, quantum ſcio, eam hactenus dedit, praeter Doctiſſimum Barrovium qui in reſponſione ſua ad Borellii objectionem ex Definitione 5ta hujus Libri eam indirecte ſed breviter et perſpicue oſtendit pag. 322. Lect. Mathem. facile autem directe demonſtratur ex eadem Definitione, quamobrem poſt Propoſitiones de aeque multiplicibus ei locum dedimus.

PROP. B.

PROP. B. LIB. V.

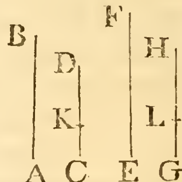
Haec etiam ex Definitione 5ta facile fluit, quare poſt praecedentem merito locatur. ineptiſſime enim poſita fuit ut Corollarium Prop. 4. Lib. hujus. Vid. Notam ad Cor. ejus Prop.

PROP. C. LIB. V.

Propoſitio haec ſaepius a Geometris uſurpatur, et neceſſaria eſt Prop. 5tae et 6tae Lib. 10. Clavius in notis poſt Def. 8. Lib. 5. eam, in numeris tantum, oſtendit ope quarundam Propoſitionum Libri 7. ut ſc. Definitionem 5. Lib. 5. quatenus numeris congruit, ex eâ numerorum proportionalium quae habetur in Def. 20. Lib. 7. demonſtret. plerique autem Commentatores exiſtimant difficile eſſe oſtendere quatuor magnitudines quae proportionales ſunt ſecundum Def. 20. Lib. 7. proportionales quoque eſſe ſecundum Def. 5. Lib. 5. Verum hoc facile ut ſequitur oſtendi poteſt.

1mo, Sint A, B, C, D quatuor magnitudines quarum prima A aeque multiplex, vel eadem pars eſt ſecundae B, ac tertia C quartae D; erunt A, B, C, D proportionales. Demonſtratur hoc in Prop. C.

2do, Si fuerit prima AB eaedem partes ſecundae CD, ac tertia EF quartae GH; erit et in hoc caſu AB ad CD, ut EF ad GH.



Sit CK pars ipſius CD, et GL eadem pars ipſius GH; et ſit AB aeque multiplex CK, atque EF ipſius GL. Ergo per Prop. C. Lib. 5. eſt AB ad CK, ut EF ad GL. ſunt autem CD, GH aeque multiplices ipſarum CK, GL; quare per Cor. Prop. 4. Lib. 5. eſt AB ad CD, ut EF ad GH.

PROP. D.

PROP. D. LIB. V.

Propoſitio haec non raro ad alias demonſtrandas adhibetur, et neceſſaria eſt Propoſitioni 9. Lib. 6. videtur autem Theonem eam omiſiſſe propter rationem in Notis ad Prop. A. memoratam.

PROP. VIII. LIB. V.

In demonſtratione hujus Propoſitionis ut nunc habetur in textu Graeco, duo ſunt caſus, (vid. demonſtrationem in editione Hervagii aut Gregorii) quorum primus eſt is in quo AE minor eſt EB; et in hoc neceſſario ſequitur HΘ multiplicem ipſius EB majorem eſſe ZH aeque multiplici ipſius AE, quae quidem ipſius AE multiplex, ex conſtructione, major eſt Δ; unde et HΘ major erit Δ. ſed in caſu ſecundo, in quo ſc. EB minor eſt ipſa AE, quamvis ZH major fuerit ipſa Δ, poteſt tamen HΘ minor eſſe eâdem Δ; unde non poteſt ſumi multiplex ipſius Δ quae primò major ſit ipsâ K ſive HΘ, quoniam ſimplex Δ eâdem eſt major. quare neceſſe fuit auctori hujus demonſtrationis unam partem conſtructionis mutare. ſine neceſſitate vero mutavit, in hoc ſecundo caſu, aliam partem conſtructionis in primo adhibitam, quando ſc. jubet ſumere N multiplicem ipſius Δ primò majorem ipsâ ZH; potuit enim ſumſiſſe ipſius Δ multiplicem quae primò major ſit ipſa HΘ ſive K, ut factum fuit in primo caſu. inepte etiam iſtam K in demonſtratione utriuſque caſus adducit, nulli enim rei inſervit, niſi ut demonſtratio prolixior evadat. eſt etiam tertius caſus cujus mentio non facta eſt in hac demonſtratione, is ſc. in quo AE in primo, aut EB in ſecundo caſu major eſt quam Δ; in hoc autem ſumendae ſunt quae-



vis ipſius AE, et EB aeque multiplices, puta duplae ipſarum, ut in hac Editione factum eſt, in qua omnes caſus ſimul demonſtrati ſunt. ex his autem liquet Theonem aut alium non ſatis Geometriae peritum Propoſitionem hanc vitiaſſe.

PROP. IX. LIB. V.

Hujus Propoſitionis demonſtrationem dedimus magis explicitam eâ quae in Elementis hactenus habetur.

PROP. X. LIB. V.

Aliam hujus demonſtrationem tradere neceſſarium fuit, ea enim quae in Editionibus Graecis et Latinis, aliiſque habetur legitima non eſt. verba enim *major*, *eadem* ſive *aequalis*, *minor* de magnitudinibus et rationibus diverſo prorſus ſenſu dicuntur, ut ex definitione 5ta et 7^tima^ hujus Libri patet. ope igitur harum examinemus demonſtrationem Propoſitionis decimae, quae ita procedit. "Habeat enim A ad C majorem rationem, quam B ad C. dico A quam B majorem eſſe. ſi "enim non eſt major, vel aequalis eſt vel minor. aequalis autem non "eſt A ipſi B, utraque enim ipſarum A, B ad C eandem haberet ra-"tionem; atque eandem non habet. non igitur A ipſi B eſt aequa-"lis." vis hujus ratiocinii haec eſt, ſi fuerit A ad C, ut B ad C, ſumptis ipſarum A, B quibuſcunque aeque multiplicibus, et ſumptâ quavis multiplici ipſius C, ſi multiplex ipſius A major fuerit multiplici ipſius C, erit, vi Definitionis 5. Lib. 5. multiplex ipſius B major eâdem multiplici ipſius C. ſed quoniam, ex hypotheſi, A majorem habet rationem ad C, quam B ad C, erunt, vi Definitionis 7. Lib. 5. quaedam ipſarum A, B aeque multiplices, et quaedam multiplex ipſius C tales, ut multiplex ipſius A major ſit multiplici ipſius C, at multiplex ipſius B non major ſit multiplici ejuſdem C. haec autem Propoſitio directe repugnat praecedenti.

praecedenti. quare A non est aequalis ipsi B. pergit demonstratio, " sed neque minor est A quam B, haberet enim A ad C, minorem ra-" tionem quam B. atqui non habet minorem, non igitur A minor " est quam B" &c. hic dicitur " haberet A ad C, minorem rationem " quam B ad C," sive, quod idem est, haberet B ad C, majorem rationem quam A ad C, hoc est, vi Def. 7. Lib. 5. erunt quaedam ipsarum B, A aeque multiplices, et quaedam ipsius C multiplex tales, ut multiplex ipsius B major sit multiplici ipsius C, at multiplex ipsius A non major sit eadem multiplici ejusdem C. et ostendendum fuit hoc nunquam contingere posse, si ratio A ad C, major fuerit quam ratio B ad C; demonstrandum igitur fuit, in hoc casu multiplicem ipsius A semper superare multiplicem ipsius C, si multiplex ipsius B eandem superet; hoc enim ostenso, manifestum esset non posse B ad C, majorem rationem habere quam A ad C, hoc est non posse A ad C, minorem habere rationem quam B ad C. minime autem ostensum est hoc in demonstratione Propositionis decimae, sed si decima demonstrata esset, immediate ex ea deduci posset; verum sine ejus ope non facile idem ostendetur, ut demonstrationem tentanti patebit. quare demonstratio decimae legitima non est. Videtur autem eum qui demonstrationem decimae, quae jam habetur, posuit vice ejus quam Eudoxus aut Euclides dederat, deceptum fuisse transferendo id quod manifestum quidem est de magnitudinibus, ad rationes, magnitudinem sc. quamvis non posse simul majorem et minorem esse aliâ. Quae eidem aequalia, et inter se sunt aequalia, Axioma est maxime evidens, si de magnitudinibus intelligatur; Euclides autem eo non utitur ad ostendendum rationes quae eidem rationi sunt eaedem, inter se easdem esse, sed hoc explicite demonstrat in Prop. 11. Lib. 5. Demonstrationem autem decimae quam in textu posuimus eandem esse cum ea Eudoxi aut Euclidis vix dubitandum est, cum ex ipsa Definitione majoris ratio-

nis, 7^{tima} sc. Lib. 5. conclusio decimae breviter et directe ostendatur.

Propositio autem praedicta ope decimae ita ostenditur. Habeat A ad C, majorem rationem quam B ad C, si ipsarum A, B sumantur aeque multiplices quaedam, et ipsius C quaedam multiplex, sitque multiplex B major multiplici ipsius C, erit et multiplex A major eâdem ipsius C multiplici.

Sint enim ipsarum A, B aeque multiplices D, E, et ipsius C multiplex F, ita ut E multiplex ipsius B major sit F; erit et D multiplex ipsius A major F.

Quoniam enim A habet ad C, majorem rationem quam B ad C, erit per 10. 5. A major quam B; igitur D multiplex ipsius A major erit E aeque multiplici ipsius B. est autem E major F; multo igitur D major est ipsâ F.

PROP. XIII. LIB. V.

In versionibus Commandini, Briggii et Gregorii habetur ad initium demonstrationis, "et multiplex quidem C superat multiplicem D; multiplex vero E non superat multiplicem F." quae quidem ex textu Graeco ad verbum translata sunt. sensus autem loci manifeste requirit ita legantur, viz. "ut multiplex quidem C superet multiplicem D; multiplex vero E non superet multiplicem F." et hoc modo hic locus recte restitutus fuit in primis editionibus Elementorum ex versione Commandini quae Oxoniae impressa fuerunt. in posterioribus vero, saltem anni 1747, error textus Graeci retentus est.

Corollarium additum est Propositioni 13^{tiae} quod necessarium sit Propp. 20, 21. hujus Libri, et aeque utile sit ac ipsa Propositio.

PROP. XIV.

PROP. XIV. LIB. V.

Hujus duos casus, quorum demonstratio non habetur in textu Graeco, visum est addere. Eorum enim demonstratio non omnino similis est demonstrationi primi casus.

PROP. XVII. LIB. V.

Ordo demonstrationis hujus in alium magis naturalem, in paucis, mutatus est. quod etiam factum fuit in Prop. 11.

PROP. XVIII. LIB. V.

Demonstratio hujus minime est Euclidis, nec legitima est. nam in ea ponitur, tribus propositis magnitudinibus, quarum duae saltem sunt ejusdem generis, quartam existere ipsis proportionalem; priusquam autem hoc ostensum fuerit, nihil valebit demonstratio quae nunc legitur. verum hoc sine demonstratione assumitur, neque, quantum video, ostendi potest ope Propositionum hanc praecedentium; tantum abest ut pro Axiomate habeatur, ut Clavius post Definitiones Lib. 5. alios interpretes secutus, volebat. Euclides certe id non ostendit, nedum quomodo quarta illa proportionalis inveniri potest, antequam ad 12. 6^{ti} Elementi veniat. nunquam autem aliquid in demonstratione Propositionis assumit quod non prius ostenderat, saltem quod existere posse non perspicuum sit; ope enim Propositionis incertae conclusio certa elici non potest. vice igitur demonstrationis quae nunc habetur, quamque certum est Theonem, vel alium quendam, loco demonstrationis Euclideae, utpote prolixioris, substituisse, legitimam reposuimus. ut vero Prop. 17. cujus 18va est conversa, demonstratur ope Prop. 1. et 2^{dae} hujus Libri, ita in hac quam dedimus demonstratione Prop. 18. tum Propositio 5ta, tum uterque casus Prop. 6^{tae}, Lib. 5. necessario adhibentur, quae

quae quidem Propositiones sunt conversae 1 ^{mae} et 2 ^{dae}. hisce autem, quintâ sc. et sexta, nulla Propositio hujus Libri, ut eum nunc habemus, utitur; neque ulli in Elementis praeterquam huic 18 ^{vae} utiles esse possunt. et hoc quidem certum est indicium easdem ab Euclide in sua hujus 18 ^{vae} demonstratione adhibitas fuisse, eamque quam posuimus, quaeque, ut fieri debuit, conversa est demonstrationis 17 ^{mae}, ab ea Eudoxi vel Euclidis haud differre. nulli enim usui inservirent 5 ^{ta} et 6 ^{ta} si in demonstrationibus Lib. 5. adhibitae non essent, ut reliquae de aeque multiplicibus Propositiones omnes adhibitae sunt.

Hieronymus Saccherius naevum hunc inesse demonstrationi hujus 18 ^{vae} agnoscit in Libro suo cui Titulus Euclides ab omni naevo vindicatus, Mediolani anno 1733, impresso. ut vero naevum hunc tollat, et demonstratio 18 ^{vae} quam nunc habemus legitima reddatur, demonstrare conatur sequentem Propositionem in pag. 115. Libri praedicti, viz.

" Sint quatuor magnitudines A, B, C, D quarum duae priores in " suo proprio genere, ac similiter posteriores vel in eodem cum priori- " bus genere, vel in alio quodam suo proprio genere consistant. Dico " rationem tertiae C ad quartam D vel aequalem fore, vel majorem, " vel minorem ratione primae A ad secundam B." Post duas autem Propositiones, tanquam Lemmata, praemissas ita procedit.

" Vel inter possibiles aeque multiplices primae A, et tertiae C, ac " simul inter possibiles aeque multiplices secundae B, et quartae D, " una quaepiam reperitur EF multiplex primae A, et IK multiplex se- " cundae B invicem aequales; ac simul (in eodem casu) una quaedam " GH multiplex tertiae C aequalis ipsi LM multiplici quartae D. vel " nusquam talis aequalitas reperitur. si primum, constat ex jam demon- " stratis ita fore A ad B, ut C ad D. sin vero nusquam reperitur ejus- " modi simul ex utraque parte aequalitas; vel saltem ad alterutram

" partem

" partem reperitur, ut puta ad partem primae A [et ſecundae B] vel " nuſquam. ſi primum; ergo (ex praemiſſis Euclideae majoris, ac mi- " noris Proportionis Definitione) habebit A ad B majorem aut mino- " rem proportionem, quam C ad D; prout GH multiplex tertiae C " minor fuerit, aut major ipſa LM multiplici quartae D. ſin vero ſe- " cundum; ergo ex una qui- " dem parte, v. g. ad ipſas A " primam, et B ſecundam, con- " tingere poterit, ut illa mul- " tiplex EF minor ſit alterâ " multiplici IK, dum vice " verſa ex altera parte illa multiplex GH major eſt alterâ multiplici " LM. Tunc autem (ſub eadem Euclidea Definitione) ratio primae A " ad ſecundam B erit minor ratione tertiae C ad quartam D; aut vice " verſâ.

A—— E——F
B—— I——K
C—— G——H
D—— L——M

" Igitur demonſtratum manet ſubſtitutum illud Axioma," [i. e. Propoſitio praedicta] &c.

Minime, ſed ſine demonſtratione manet; quod enim dicit poſſe contingere, poterit innumeris caſibus nunquam contingere, et propterea demonſtratio ejus nulla eſt. nam, ex. gr. ſi fuerit A latus et B diameter quadrati; C vero latus et D diameter alterius quadrati; nunquam poterit multiplex ipſius A aequalis eſſe multiplici ipſius B; nec aliqua ipſius C aequalis alicui ipſius D, ut notum eſt; et tamen nunquam contingere poterit ut, exiſtente multiplici quadam ipſius A majore, vel minore multiplici quadam ipſius B, multiplex ipſius C vice verſa minor vel major ſit multiplici ipſius D; ſumptis ſc. ipſarum A, C aeque multiplicibus, et ipſarum B, D aeque multiplicibus. ſunt enim A, B, C, D proportionales.

Idem autem judicium ferendum eſt de Demonſtratione quam qui-

dam

dam tradunt Propositionis 1. Lib. 6. quod de Demonstratione hujus Prop. 18. datum fuit; quoniam eodem quo haec fundamento, minime sc. demonstrato, innititur.

PROP. XIX. LIB. V.

Corollarium huic subjunctum est, quod aeque saepe usui sit atque ipsa Propositio. Corollarium autem quod in textu Graeco huic 19^{nae} appositum est, manifeste ostendit Librum 5^{tum} a Geometriae ignaris corruptum fuisse. etenim conversio rationis nullo modo pendet ex 19na. et demonstratio ejus quam ope 19^{nae} tradunt varii Euclidis interpretes legitima non est, ut recte observavit Clavius, qui demonstrationem legitimam dedit, quam in Propositione E posuimus; eam autem posuit tanquam Corollarium Propositionis 19. quod his verbis incipit, "Hinc "facile sequitur," cum nullo modo inde sequatur.

PROP. XX, XXI, XXII, XXIII, et XXIV. LIB. V.

Demonstrationes Prop. 20. et 21. breviores sunt iis quibus Euclides utitur in Propositionibus hisce facilioribus vel in praecedentibus, vel in libris sequentibus. visum igitur est eas magis explicite tradere. Propositio etiam 22. et 23. ad quotcunque magnitudines, ut fieri debuit, extenduntur. et simili modo extendi potest 24. ut in Corollario notatur, et aliud Corollarium additum est, aeque ac Propositio utile. verbum etiam "utcunque" quod in textu Graeco et versionibus deficiebat, additum est prope finem Prop. 23.

In scripto D. Philippi Naudaci, post mortem ejus edito in Historia Academiae Regiae Berolinensis anni 1745, pag. 50. Propositio 23. Lib. 5. Euclidis arguitur tanquam obscure enuntiata, et inde via longiore demonstrata. Verum enuntiatio ibi tradita non est Euclidis sed Tacqueti ut in scripto agnoscitur, quae quidem, quamvis non aeque commoda,

commoda, reipſa eadem eſt cum ea quae nunc habetur in Elementis. in ea autem nihil eſt obſcuri, quamvis auctor ſcripti, magnitudines proportionales perverſo ordine diſponat, unde obſcurior evadit enuntiatio. ſine dubio autem Euclides hanc 23^{tiam}, aeque ac 22^{dam}, de quotcunque magnitudinibus, quae binae ſumptae ſunt proportionales, non de ſex tantum enuntiavit; et huic generali caſui Naudaei enuntiatio minime rite accommodari poteſt.

Demonſtratio vero Propoſitionis 23. Lib. 5. quae in ſcripto illo traditur omnino eſt inepta; ſi enim magnitudines proportionales figurae fuerint planae aut ſolidae, nullum ex ipſis rectangulum (quod ille imperite productum vocat) fieri intelligi poteſt. et ſi dicatur, in hoc caſu rectas lineas aſſumendas eſſe figuris proportionales; eo modo demonſtratio, Euclidis demonſtratione multo longior evaderet. quin ſi apta eſſet Naudaei demonſtratio, quis non videt eam non poſſe in Libro 5to locum habere?

PROPP. F, G, H, K. LIB. V.

Propoſitiones has fini Libri 5^{ti} adjecimus, quoniam ſaepius iis utuntur Geometrae veteres et recentiores. et quidem in multis caſibus rationes compoſitae in demonſtrationibus ſine earum ope adhiberi non poſſunt.

Qui cupit doctrinam de proportionalibus Libro hoc quinto traditam ſolide defenſam videre, et argumenta contra eam ab And. Tacquet, Alph. Borellio aliiſque adducta pleniſſime confutata, conſulat magni Barrovii Lectiones Mathematicas 7. et 8^{vam} Anni 1666.

Emendato jam Libro quinto, ſententiae Clariſſ. Barrovii lubentiſſime aſſentior, " Nihil" ſcilicet " extare in toto Elementorum opere " proportionalium doctrina ſubtilius inventum, ſolidius ſtabilitum, ac- " curatius pertractatum." quod quidem Geometras exiſtimaturos non po-

 tuiſſe

tuiſſe dici, eodem quo nunc jure, ex tempore Theonis hactenus, ſperare licet.

DEF. II. et V. LIB. VI.

DEFINITIO ſecunda non videtur Euclidis eſſe, ſed cujuſdam imperiti. Nulla enim figurarum reciprocarum mentio fit ab Euclide, neque, quantum ſcio, a quocunque alio Geometra. obſcure enuntiata eſt, quare eam magis claram exhibuimus. vice autem ejus haec quae ſequitur ponenda videtur, viz.

DEF. II.

Duae magnitudines dicuntur eſſe reciproce proportionales duabus aliis, quando altera priorum eſt ad alteram poſteriorum, ut reliqua poſteriorum ad reliquam priorum.

Definitio autem quinta, quae magno diſcentium incommodo a Theonis tempore in Elementis locum habuit, ex iis, propter rationes in notis ad Prop. 23. Lib. 6. adducendas, merito ſublata eſt.

PROP. I, et II. LIB. VI.

Corollarium primae harum additum ſaepiſſime adhibetur. Enuntiatio vero ſecundae magis generalis reddita eſt.

PROP. III. LIB. VI.

Caſus ſecundus, qui habetur in Prop. A. pariter utilis ac primus, huic Propoſitioni additus eſt; videlicet is in quo angulus trianguli exterior bifariam ſecatur recta lineâ. Demonſtratio ejus ſimillima eſt demonſtrationi primi caſus, et ob hanc forſan cauſam tum ea, tum enuntiatio caſus, omiſſa eſt ab imperito quodam editore. Pappus certe hâc,

tanquam

tanquam Propoſitione elementari, ſine demonſtratione utitur in Prop. 39. Lib. 7. Collectionum Mathematicarum.

PROP. VII. LIB. VI.

Caſum omiſſum, et in demonſtrationibus non raro occurrentem, huic Propoſitioni addidimus.

PROP. VIII. LIB. VI.

Manifeſtum eſt aliquem mutaſſe demonſtrationem quam Euclides hujus Propoſitionis dederat. Etenim auctor ejus poſtquam demonſtraverat triangula eſſe inter ſe aequiangula, particulatim oſtendit latera eorum circa aequales angulos proportionalia eſſe, quaſi hoc non factum fuiſſet in Propoſitione quarta hujus Libri. haec autem ſuperflua non inveniuntur in verſione ex lingua Arabica et nunc omiſſa ſunt.

PROP. IX. LIB. VI.

Demonſtratio hujus facta eſt in caſu particulari, in quo ſcilicet pars tertia abſcindenda eſt a data recta; quare minime videtur Euclidis eſſe. Praeterea in quatuor magnitudinibus proportionalibus concludit Auctor tertiam aeque multiplicem eſſe quartae, atque prima eſt ſecundae; quod quidem in Libro 5to, ut eum nunc habemus, nullibi oſtenſum eſt. ſed hoc, ut alia, aſſumit Editor ex confuſanea apud vulgus recepta proportionalium notione. generalem igitur et legitimam Demonſtrationem hujus Propoſitionis tradere neceſſe fuit.

PROP. XVIII. LIB. VI.

Demonſtratio hujus vitiata videtur. nam in quadrilateris tantum, oſtenditur Propoſitio, neque dicitur, quo modo extendi poſſit ad rectilinea quinque aut plurium laterum. praeterea in duobus triangulis

inter ſe aequiangulis concluditur eſſe latus unius ad latus homologum alterius, ut latus aliud primi ad latus alterius huic homologum, ſine permutatione proportionalium, contra morem Euclidis, ut ex ſequente Propoſitione 19na manifeſtum eſt. eodem vitio laborat concluſio, nam latera circa angulos unius rectilinei non oſtenduntur proportionales lateribus circa aequales angulos alterius, rurſus enim omiſit Auctor demonſtrationis permutationem proportionalium. Viſum igitur eſt tradere demonſtrationem hujus via Euclideana, eâdem ſc. quâ utitur in Prop. 20. hujus libri; et in figuris quinquelateris, ut modus quo extendi poteſt ad figuras plurium laterum perſpicue appareat.

PROP. XXIII. LIB. VI.

Nihil in Geometriae elementis Tyronibus difficilius intellectu haberi ſolet, doctrinâ de rationum compoſitione, quam abſurdam et ἀγεωμέτρικὴν reddidit Theon, ſubſtituendo Definitionem 5^{tam}, Lib. 6^{ti}, vice Definitionis bonae rationis compoſitae, quam, ſine dubio, dederat Eudoxus vel Euclides poſt Definitionem rationis triplicatae &c. in Libro 5to, proprio ſcilicet ejus loco. Theonis autem Definitio haec eſt; ratio ex rationibus componi dicitur ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσί τινὰ. quam ita vertit Commandinus, " quando rationum quantitates inter ſe multiplicatae, aliquam efficiunt rationem." Walliſius autem πηλικότητες vertit "rationum exponentes." et Gregorius poſtrema Definitionis verba reddit " illius facit quantitatem." quocunque autem ſenſu accipiantur verba " quantitates" ſive "exponentes rationum," ipſarumque "multiplicatio," ἀγεωμέτρικὴ et inutilis erit Definitio. Nulla enim poterit eſſe multiplicatio niſi per numerum; quantitas autem ſive exponens rationis, ut Eutocius in Comment. in Prop. 4. Lib. 2. Archimedis de Sphaera et Cylindro, et recentiores interpretantur, eſt numerus qui multiplicans conſequentem producit

ducit antecedentem, ſive, quod eodem redit, numerus ortus ex diviſione antecedentis per conſequentem; multae autem ſunt rationes tales, ut nullus numerus oriri poſſit ex diviſione antecedentis per conſequentem; ex. gr. ratio quam diameter quadrati habet ad ejuſdem latus; et ratio quam habet circumferentia circuli ad ipſius diametrum; aliaeque ejuſmodi. Praeterea Definitionis hujus apud Euclidem, Archimedem, Apollonium, reliquoſque veteres, qui ratione compoſitâ ſaepius utuntur, nullum veſtigium invenitur. In 23^{tia} enim 6^{ti} Elementi in qua primum rationis compoſitae fit mentio, hujus Definitionis, quae hic, ſi ullibi, neceſſaria fuiſſet, ne vel verbum apparet; legitima autem Definitio explicite adhibetur his verbis, " ſed ratio K ad M compoſita eſt ex ratione K ad L, et ratione L ad M." inutilis igitur prorſus et abſurda eſt Theonis Definitio. Theonem enim in Elementa eam induxiſſe vix dubitari poteſt; extat enim in commentariis ejus in Ptolomaei Μεγάλην Σύνταξιν, pag. 62. commentarii; ubi et puerilem tradit ejus explicationem, utpote ſolummodo eis rationibus convenientem quae numeris exhiberi poſſunt; inde autem ad verbum excerpta eſt, una cum praedicta explicatione, et Libri ſexti Definitionibus praefixa, ut conſtat ex Hervagii Editione. Zambertus vero et Commandinus haec iiſdem definitionibus in eorum Latinis verſionibus ſubjungunt. Non autem agnoſcit hanc Definitionem Campanus, nec, ut videtur, codices Arabici quibus ille uſus fuit. Clavius ad Def. 5. Lib. 6. recte judicavit Definitionem rationis compoſitae potuiſſe factam fuiſſe eâdem viâ qua Definitiones rationis duplicatae, triplicatae &c. factae ſunt, ut ſcilicet " quemadmodum propoſitis pluribus magnitudinibus proportionalibus, primam ad " tertiam dixit Euclides, Def. 10. Lib. 5. habere proportionem duplicatam ejus, quam prima habet ad ſecundam; primam vero ad " quartam habere proportionem triplicatam ejus, quam prima ad ſecundam habet, hoc eſt compoſitam ex duabus aut tribus intermediis pro-

" portionibus

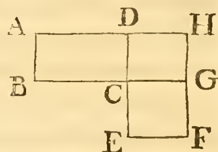
" portionibus aequalibus, et ſic deinceps: ita quoque ſi ponantur ordine plures magnitudines ejuſdem generis non proportionales, dicetur prima ad ultimam habere proportionem compoſitam ex omnibus proportionibus intermediis,—ſolum eam ob cauſam, quod illae proportiones intermediae ſunt inter extremas duas magnitudines interjectae; quemadmodum Definitione 10ma, Lib. 5. proportio primae ad tertiam dicebatur duplicata, hoc ſolo nomine, quia duae proportiones aequales interpoſitae ſunt inter extremas duas magnitudines: adeo ut non ſit aliud diſcrimen inter hanc compoſitionem proportionum, et illam duplicationem, triplicationem &c. quae Libro 5to explicata eſt, quam quod in duplicatione, triplicatione &c. proportionum, interjiciuntur proportiones omnes aequales, in compoſitione vero proportionum non neceſſe eſt interpoſitas aequales eſſe." Edmundus vero Scarburgh in Euclide ſuo Anglico, pagg. 238, 266, aperte affirmat Definitionem 5. Lib. 6. ſuppoſititiam eſſe, et veram rationis compoſitae Definitionem, in Definitione 10. Lib. 5. rationis ſcilicet duplicatae, contineri, vel ex ea ſubintelligendam eſſe, eo videlicet modo quo Clavius eam in praecedente citatione explicavit. Hi autem et alii Recentiores definitionem iſtam 5^{tam}, Lib. 6. ſimul retinent, prolixiſque Commentariis illuſtrant, quum potius eam ex Elementis ſuſtuliſſe debuiſſent.

Etenim, comparando Definitionem 5. Lib. 6. cum Propoſitione 5. Lib. 8. clare apparebit Definitionem iſtam ſuppoſititiam eſſe. Nam in Propoſitione illa demonſtratur numerum planum cujus latera ſunt C, D habere ad numerum planum cujus latera ſunt E, Z (vid. Hervagii aut Gregorii Editionem) rationem compoſitam ex rationibus laterum, hoc eſt ex rationibus C ad E, et D ad Z. ratio vero compoſita ex rationibus C ad E, et D ad Z, ex Def. 5. Lib. 6. et explicatione quam ejuſdem tradunt omnes Commentatores, eſt ratio numeri facti ex multiplicatione

tiplicatione antecedentium C, D ad factum ex multiplicatione consequentium E, Z, hoc est ratio numeri plani cujus latera sunt C, D ad numerum planum cujus latera sunt E, Z. Igitur Propositio quae est Definitio 5. Lib. 6. eadem omnino est cum Propositione 5. Lib. 8. In altero igitur horum locorum delenda est; absurdum enim est Propositionem in Elementis poni tanquam Definitionem, et eandem in iisdem demonstrari. Nullum autem dubium est Prop. 5. Lib. 8. debere locum habere in Elementis, idem enim in ea demonstratur de numeris planis quod in Prop. 23. Lib. 6. demonstratur de parallelogrammis aequiangulis; quare Definitio 5. Lib. 6. in Elementis locum habere non potest. unde perspicue apparet eam minime positam fuisse ab Euclide, sed a Theone vel alio quodam Geometriae minus perito.

Nullus autem, quantum scio, proprium usum rationis compositae hactenus ostendit, vel propter quam causam in Geometriam introducta fuerit; quum omnia in quibus solet adhiberi ratio composita, possint etiam sine ejusdem auxilio, tum enuntiari, tum demonstrari. Usus autem rationis compositae in hoc unice consistit, quod ejus ope periphrases evitentur, et ita Propositiones possint vel enuntiari vel demonstrari brevius, vel utrumque fieri possit. Ex. gr. si Propositio haec 23. Lib. 6. enuntianda esset, non facta rationis compositae mentione, ita fieret; si duo parallelogramma aequiangula fuerint, et fiat ut latus primi ad latus secundi, ita quaevis recta assumpta ad secundam rectam; ut vero latus reliquum primi ad latus reliquum secundi, ita fiat secunda recta ad tertiam; erit parallelogrammum primum ad secundum, ut prima recta ad tertiam rectam. et demonstratio eadem esset cum ea quam nunc habemus. Veteres autem cum vidissent hanc enuntiationem posse breviorem reddi, si nomen impositum esset rationi quam habet prima recta ad ultimam, quo nomine simul indicarentur rationes intermediae, primae scilicet ad secundam, et secundae ad tertiam rectam, et ita deinceps si

plures fuerint rectae; rationem hanc primae ad ultimam dixerunt rationem compositam ex rationibus primae ad secundam, et secundae ad tertiam rectam, hoc est, in praesenti casu, ex rationibus quae eaedem sunt rationibus laterum. atque ita brevius Propositionem enuntiaverunt, viz. Si fuerint duo aequiangula parallelogramma, habebunt inter se rationem eandem ei quae composita est ex rationibus quae eaedem sunt rationibus laterum. quae quidem paucioribus verbis effertur quam praecedens enuntiatio, eodem autem sensu. Vel adhuc brevius; aequiangula parallelogramma inter se rationem habent eandem ei quae composita est ex rationibus laterum. atque hae duae enuntiationes ultimae, prima praesertim, conveniunt demonstrationi quae nunc in textu Graeco habetur. potest autem Propositio brevius demonstrari, ut apud Franciscum Candallam hoc modo, viz. sint aequiangula parallelogramma ABCD, CEFG, et compleatur parallelogrammum CDHG; quoniam igitur tria sunt parallelogramma AC, CH, CF, habebit (ex definitione rationis compositae) primum AC ad tertium CF, rationem quae composita est ex ratione AC ad CH, et ratione CH ad CF; est autem parallelogrammum AC ad ipsum CH, ut recta BC ad ipsam CG; et parallelogrammum CH est ad ipsum CF, ut recta DC ad rectam CE; ergo habet parallelogrammum AC ad ipsum CF rationem quae composita est ex rationibus quae eaedem sunt rationibus laterum. et huic demonstrationi convenit enuntiatio quae nunc habetur, viz. parallelogramma aequiangula inter se habent rationem ex laterum rationibus compositam. nam vulgaris lectio "ex lateribus compositam" absurda est. retinuimus autem in hac Editione demonstrationem quae habetur in textu Graeco, quamvis prolixiorem eâ quam tradit Candalla, quoniam in illa, non autem in hac, ostenditur quomodo ex datis rationibus laterum, inveniatur ratio



ratio ex iis compoſitâ, hoc eſt ratio parallelogrammorum; ut Tyrones in ſimilibus caſibus rationem ex duabus vel pluribus rationibus datis compoſitam invenire queant.

Ex dictis obſervari poteſt, in magnitudinibus quibuſcunque ejuſdem generis A, B, C, D &c. rationem compoſitam ex rationibus primae ad ſecundam, ſecundae ad tertiam et ita deinceps ad ultimam, nomen tantum eſſe ſeu modum loquendi, quo ſignificatur ratio quam habet prima A ad ultimam D, et quo ſimul indicantur rationes omnium magnitudinum A ad B, B ad C, C ad D a prima ad ultimam ad ſe invicem, ſive eaedem fuerint inter ſe, ſive non fuerint; ſicut in magnitudinibus deinceps proportionalibus A, B, C, D &c. ratio duplicata primae ad ſecundam nomen tantum eſt ſeu modus loquendi, quo ſignificatur ratio quam habet prima A ad tertiam C, et quo ſimul indicatur duas eſſe rationes magnitudinum a prima ad ultimam, primae ſc. A ad ſecundam B, et ſecundae B ad tertiam ſive ultimam C, quae quidem rationes inter ſe ſunt eaedem; et ratio triplicata primae ad ſecundam eſt nomen ſive modus loquendi, quo ſignificatur ratio primae A ad quartam D, et quo ſimul indicatur tres eſſe rationes magnitudinum a prima ad ultimam, primae ſc. A ad ſecundam B, et ipſius B ad tertiam C, et ipſius C ad quartam ſeu ultimam D, quae quidem rationes ſunt eaedem inter ſe; idemque ſimiliter de aliis rationibus multiplicatis dicendum. hanc autem veram eſſe harum rationum explicationem patet ex Definitionibus rationis duplicatae et triplicatae, in quibus Euclides utitur verbo λέγεται, dicitur ſive nominatur; quo verbo, ſine dubio utebatur etiam in Definitione rationis compoſitae quam Theon aliuſve ex Elementis ſuſtulit; nam idem verbum retentum eſt in Definitione inepta rationis compoſitae quae nunc in Def. 5. Lib. 6. habetur. In citationibus autem harum Definitionum aliquando retinetur, ut in Demonſtratione Prop. 19. Lib. 6. " prima ad tertiam duplicatam rationem ἔχειν λέ-

 " γεται"

"γεται" quae verba Commandinus aliique male reddunt "habet" vice "habere dicitur;" aliquando autem omittitur, ut in Demonſtratione Prop. 33. Lib. 11. ubi habetur "prima ad quartam triplicatam rationem ἔχει; ſine dubio autem ἔχει hic ſignificat idem quod ἔχειν λέγεται. ita etiam in Prop. 23. Lib. 6. ubi legitur "ſed ratio K ad "M σύγκειται" compoſita eſt "ex ratione K ad L, et ratione L ad "M," brevitatis ſc. gratia, cum dicendum fuit, ut in Definitione, συγκεῖσθαι λέγεται, componi dicitur.

Ex his autem, et Propoſitionibus quas Libro quinto ſubjunximus, intelligi et explicari poſſunt omnia quae apud Geometras tum veteres tum recentiores de ratione compoſita habentur.

PROP. XXIV. LIB. VI.

Videtur imperitum quendam ex duabus diverſis hujus Propoſitionis demonſtrationibus hanc quam nunc habemus compoſuiſſe; ex una ſcilicet quae per Prop. 2. hujus Lib. 6. et alterâ quae per Prop. 4. ejuſdem fieri poteſt. poſtquam enim per 2. hujus et componendo, permutandoque, oſtenderat latera circa communem angulum parallelogrammorum proportionalia eſſe, immediate concludere potuiſſet proportionalia eſſe latera circa reliquos angulos aequales, ope ſcilicet Prop. 34. Lib. 1. et Prop. 7. Lib. 5. Verum ille hoc negligens pergit oſtendere triangula et parallelogramma aequiangula eſſe, et longo circuitu, ope Prop. 4. hujus, et 22. Lib. 5. concludit rem eandem. manifeſtum propterea eſt hanc inſcite factam demonſtrationem minime Euclidis eſſe. ſuperfluis igitur rejectis, demonſtrationem ſimpliciorem dedimus ope 4tae hujus, eandem ſcilicet quam praebent codices Arabici ope 2dae hujus et componendo; in hiſce autem permutatio negligitur, neque parallelogramma aequiangula eſſe oſtenduntur, quod Tyronum gratia faciendum fuit.

PROP. XXV. LIB. VI.

Liquido patet demonſtrationem hujus quam Euclides dederat vitiatam fuiſſe ab Editore quodam Geometriae minus perito. poſtquam enim oſtenderat " ut rectilineum ABC ad rectilineum KGH, ita BE " parallelogrammum ad parallelogrammum EF" opus fuit ſolummodò addere, " eſt autem rectilineum ABC aequale parallelogrammo BE, àe- " quale igitur eſt KGH rectilineum parallelogrammo EF; videlicet " per Prop. 14. Lib. 5." ſed inter has duas ſententias interpoſuit " quare permutando ut ABC rectilineum ad parallelogrammum BE, " ita rectilineum KGH ad EF parallelogrammum" putavit ſcilicet non tam perſpicuum eſſe concludere ſecundam quatuor proportionalium quartae aequalem eſſe, ex aequalitate primae et tertiae, quod quidem demonſtratum eſt in Prop. 14. Lib. 5. quam concludere tertiam aequalem eſſe quartae, ex aequalitate primae et ſecundae, quod nuſpiam in Elementis quae jam habemus oſtenſum eſt. verum quamvis haec Propoſitio, tertiam ſcilicet quatuor proportionalium aequalem eſſe quartae, ſi prima aequalis fuerit ſecundae, fuiſſet ab Euclide Elementis ſuis inſerta, ut veriſimile eſt eam fuiſſe, nunquam tamen ille in praeſenti caſu eâdem uſus fuiſſet; quoniam, ut dictum fuit, ſine redundante hac permutatione proportionalium concluſio eadem directe elici poteſt. haec autem fuſius oſtendimus, tum quoniam certum praebent indicium textum Euclidis vitiatum fuiſſe, idem enim error invenitur in textu Graecò Prop. 23. Lib. 11. bis, et bis in Prop. 2. Lib. 12. et in Propp. 5. 11. 12. 18. ejuſdem; in quibus Libri 12. locis excepto ultimo, recte omiſſa eſt haec permutatio proportionalium in verſionis Commandini Editione Oxonienſi; tum ut caveant Geometrae ab uſu permutationis in ſimili caſu, non raro enim Recentiores, et inter alios ipſe Commandinus in Commentario ad Prop. 5. Lib. 3. pag. 6. b. Pappi Alexan-

drini, et alibi, incidunt in hunc errorem; praeoccupavit ſcilicet multorum mentes vulgaris proportionalium idea, qua fit ut accuratam vix percipiant.

Praeterea quamvis rectilineum ABC cui ſimile faciendum eſt, poſſit eſſe cujuſcunque generis, in demonſtratione tamen Graeci codices habent triangulum vice rectilinei, qui error correctus eſt in verſionis Commandini editione quae Oxonii impreſſa eſt.

PROP. XXVII. LIB. VI.

Secundus caſus hujus habet ἀλλῶς praefixum quaſi alia eſſet demonſtratio; ab imperito ut videtur Librario. quam vocem recte omiſit Gregorius. ſchema autem hujus ſecundi caſus iiſdem literis alphabeti quae in ſchemate primi caſus adhibitae fuerunt, notari debuit. ut jam factum eſt.

PROP. XXVIII, et XXIX. LIB. VI.

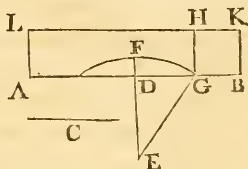
Problemata haec, quorum primo neceſſaria eſt Prop. 27tima, ſunt omnium in Elementis maxime generalia et utilia, et a veteribus in ſolutione aliorum Problematum ſaepiſſime adhibita; et propterea inſcite admodum ab And. Tacquet et Claud. Dechales in iis quas dederunt Elementorum Editionibus omittuntur, et inſulſe admodum ab iis dicuntur nullius fere eſſe uſus. Horum caſus quando ad datam rectam lineam dato quadrato aequale rectangulum applicandum eſt, deficiens, aut excedens quadrato; et quando ad datam rectam lineam dato rectangulo aequale rectangulum applicandum eſt deficiens aut excedens quadrato, frequentiſſime a Geometris uſurpantur. Quare Tyronum gratia viſum eſt eorum conſtructiones, ut ſequitur tradere.

1. Ad datam rectam lineam dato quadrato aequale rectangulum applicare,

plicare, deficiens quadrato. oportet autem datum quadratum non majus esse eo quod a dimidia describitur.

Sit data recta linea AB, datum autem quadratum cui oportet aequale rectangulum ad AB applicare sit illud quod a data recta C describitur non majus existens eo quod fit a dimidio ipsius AB.

Secetur AB bifariam in D, et si quadratum ex AD aequale fuerit quadrato ex recta C, factum jam erit quod proponebatur. si autem non est aequale, erit AD major quam C ob determinationem. ducatur DE ad rectos angulos ipsi AB, et fiat DE aequalis ipsi C; producatur vero ED ad F, ut EF aequalis sit ipsi AD seu DB, et centro E intervallo EF describatur circulus qui occurrat rectae AB in G, et super GB describatur quadratum GBKH, et compleatur rectangulum AGHL; jungaturque EG.



Quoniam igitur bifariam secta est AB in D, erit [a] rectangulum AG, GB una cum quadrato ex DG aequale (quadrato ex DB, hoc est quadrato ex EF sive EG, hoc est) quadratis ex ED, DG. commune auferatur quadratum ex DG, et reliquum rectangulum AG, GB aequale erit quadrato ex ED, hoc est ex C. rectangulum autem AG, GB est ipsum AH rectangulum, quia GH aequalis est ipsi GB. rectangulum igitur AH aequale est dato quadrato ex recta C. Quare ad datam rectam lineam AB dato quadrato ex recta C, aequale rectangulum AH applicatum est deficiens quadrato GK. Quod facere oportebat.

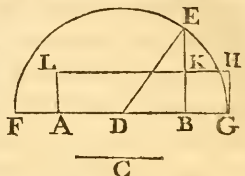
a. 5. 2.

2. Ad datam rectam lineam dato quadrato aequale rectangulum applicare, excedens quadrato.

Sit data recta linea AB, datum autem quadratum sit illud quod a data recta C describitur.

Secetur AB bifariam in D, et ducatur BE ad rectos angulos ipsi AB, fiatque

ſiatque BE aequalis rectae C, et, junctâ DE, centro D, intervallo DE circulus deſcribatur, qui occurrat ipſi AB productae in G; ſuper BG deſcribatur quadratum BGHK, et compleatur rectangulum AGHL.



Quoniam igitur bifariam ſecta eſt AB in D, a. 6. 2. et ipſi adjicitur BG, erit [a] rectangulum AG, GB una cum quadrato ex DB aequale (quadrato ex DG ſeu DE, hoc eſt) quadratis ex EB, BD. auferatur commune quadratum ex DB, et reliquum rectangulum AG, GB aequale erit quadrato ex BE, hoc eſt quadrato ex recta C. rectangulum autem AG, GB eſt ipſum AH rectangulum, quia GH aequalis eſt ipſi GB. rectangulum igitur AH, aequale eſt quadrato ex recta C. Quare ad datam rectam AB dato quadrato ex C, aequale rectangulum AH applicatum eſt excedens quadrato GK. Quod facere oportebat.

3. Ad datam rectam lineam dato rectangulo aequale rectangulum applicare, deficiens quadrato. oportet autem datum rectangulum non majus eſſe quadrato quod a dimidia deſcribitur.

Sit data recta AB, datum autem rectangulum id quod rectis C, D continetur non majus exiſtens quadrato ex dimidio rectae AB. oportet ad datam rectam AB dato rectangulo C, D aequale rectangulum applicare deficiens quadrato.

Ducantur AE, BF ad rectos angulos ipſi AB, et ad eaſdem ejus partes, quarum AE quidem aequalis ſit ipſi C, BF vero rectae D. bifariam ſecetur juncta EF in G, centroque G intervallo GE deſcribatur circulus, occurratque rectae AE rurſus in H, et jungatur HF, cui parallela ducatur GK, et ad AB ducatur GL parallela rectae AE.

Quoniam igitur angulus EHF in ſemicirculo aequalis eſt angulo recto EAB, parallelae erunt AB, HF, et parallelae ſunt AH, BF; quare AH aequalis eſt BF, et rectangulum EA, AH aequale erit ipſi EA, BF,

hoc

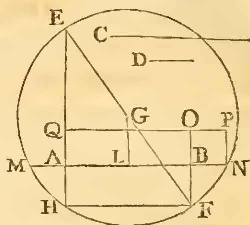
hoc eſt rectangulo C, D. et quoniam aequales ſunt EG, GF, et AE, LG, BF inter ſe parallelae, aequales erunt AL, LB, aequales etiam ſunt [a] EK, KH. eſt autem, ob determinationem, rectangulum C, D a. 3. 3.
non majus quadrato ex AL dimidio ipſius AB, ergo et rectangulum EA, AH non majus eſt quadrato ex AL hoc eſt ex KG; commune addatur quadratum ex KE, et quadratum [b] ex AK non majus erit quadratis ex EK, KG hoc eſt quadrato ex EG; b. 6. 2.
quare recta AK ſeu GL non major eſt ipsâ GE. et ſiquidem GE aequalis fuerit ipſi GL, circulus EHF continget rectam AB in L, et quadratum ex AL aequale * erit rectangulo EA, AH * 36. 3.
ſive dato rectangulo C, D, et factum erit quod proponebatur. ſi vero inaequales fuerint EG, GL erit EG major, et propterea circulus EHF ſecabit rectam AB; ſecet in M, N punctis, et ſuper NB deſcribatur NBOP quadratum, et compleatur rectangulum ANPQ. Quoniam igitur aequales ſunt [a] ML, LN, et aequales oſtenſae ſunt AL, LB, aequales erunt AM, NB. rectangulum igitur AN, NB aequale eſt ipſi NA, AM, hoc eſt [c] rectangulo EA, AH ſive rectangulo C, D. rec- c. Cor. 36. 3.
tangulum vero AN, NB eſt ipſum AP, eſt enim PN aequalis ipſi NB. Ergo rectangulum AP aequale eſt rectangulo C, D. Igitur ad datam rectam AB, dato C, D rectangulo aequale rectangulum AP applicatum eſt deficiens quadrato BP. Quod facere oportebat.

4. Ad datam rectam lineam dato rectangulo aequale rectangulum applicare, excedens quadrato.

Sit AB data recta linea, datum autem rectangulum ſit id quod rectis C, D continetur. oportet ad datam rectam AB dato rectangulo C, D aequale rectangulum applicare excedens quadrato.

Ducantur

Ducantur AE, BF ad rectos angulos ipsi AB, et ad contrarias ejus partes, quarum AE aequalis sit ipsi C, et BF rectae D. jungatur EF et bifariam secetur in G, centroque G, intervallo GE describatur circulus, occurratque rectae AE rursus in H, et jungatur HF, et ad AB ducatur GL parallela ipsi AE; occurrat vero circulus rectae AB productae in M, N, et super BN describatur quadratum NBOP, et compleatur rectangulum ANPQ. Quoniam igitur angulus EHF in semicirculo aequalis est angulo recto EAB, parallelae erunt AB, HF; aequales igitur sunt AH, BF, et rectangulum EA, AH aequale rectangulo EA, BF, hoc est ipsi C, D rectangulo. et quoniam aequales sunt ML, LN, ut et AL, LB, erunt et MA, BN aequales, et propterea rectangulum AN, NB aequale est ipsi MA, AN, hoc est [a] ipsi EA, AH sive rectangulo C, D. rectangulum igitur AN, NB, hoc est ipsum AP aequale est rectangulo C, D. ad datam igitur rectam AB dato rectangulo C, D aequale rectangulum AP applicatum est, excedens quadrato BP. Quod facere oportebat.



a. 35. 3.

Constructiones has 3^tii^. et 4^ti^. Problematis primus, quantum scio, dedit Willebrordus Snellius in Apollonio suo Batavo, et postea Cl. Halleius in Schol. ad Prop. 18. Lib. 8^vi^ Conicorum Apollonii, a se restituti.

Problema 3. ita aliter enuntiatur, datam rectam AB secare in puncto N, et facere rectangulum a segmentis AN, NB aequale dato spatio. vel, quod eodem redit, Datâ summa AB laterum rectanguli, datoque rectangulo magnitudine, latera invenire.

Et Problema 4. idem est cum hoc, invenire in data recta AB producta punctum N quod faciet rectangulum AN, NB aequale dato spatio,

tio, vel quod eodem redit datâ differentia AB laterum rectanguli, ipsoque magnitudine dato, invenire latera.

PROP. XXXI. LIB. VI.

In Demonstratione hujus inversio proportionalium bis est omissa, addita igitur est, ut conclusio rite fieret ope 24[tae], Lib. 5. quod Clavius prius fecerat.

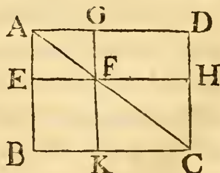
PROP. XXXII. LIB. VI.

Enuntiatio Propositionis 26[tae], Lib. 6. non satis generalis est. etenim non tantum duo parallelogramma similia et similiter posita, quae communem habent angulum, sunt circa eandem diametrum; verum etiam duo similia et similiter posita, quorum unum habet angulum angulo alterius ad verticem oppositum, habent diametros in recta linea. videtur vero aliam fuisse horum demonstrationem, directam quidem, cui inserviebat Propositio 32[da], quae etiam aliter et paulo brevius ut sequitur ostendi potest.

PROP. XXXII. LIB. VI.

Si duo triangula componantur ad unum angulum, &c.

Sint duo triangula GAF, HFC quae duo latera AG, GF, duobus lateribus FH, HC proportionalia habeant, sc. sit sicut AG ad GF, ita FH ad HC; parallela autem sit GA ipsi HF, et GF ipsi HC. erit AF ipsi FC in directum.



Ducatur CK parallela [a] ipsi FH, occurratque rectae GF productae in K. Quoniam igitur utraque AG, KC parallela est ipsi FH, erunt et AG, KC inter se parallelae[b], quare anguli AGF, FKC sunt inter se aequales, alterni enim

a. 31. 1.
b. 30. 1.

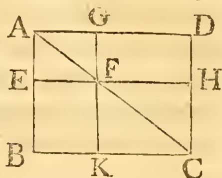
c. 34. 1. enim ſunt. eſt autem AG ad GF, ut (FH ad HC, hoc eſt [c]) CK ad
d. 6. 6. KF; et ſunt circa aequales angulos; ergo aequiangula [d] ſunt AGF, CKF triangula, et propterea angulus AFG aequalis eſt angulo CFK, eſt
e. 14. 1. autem GFK recta linea; igitur [e] AF ipſi FC eſt in directum.

Propoſitio vero 26ta ex 32da ita demonſtratur.

Si duo parallelogramma ſimilia et ſimiliter poſita communem habuerint angulum, aut angulos ad verticem oppoſitos; erunt illorum diametri in recta linea.

Primo, habeant parallelogramma ABCD, AEFG communem angulum BAD, ſintque ſimilia et ſimiliter poſita, erunt ABCD, AEFG circa eandem diametrum.

Producantur enim EF, GF ad H, K, et jungantur FA, FC. quoniam igitur ſimilia ſunt ABCD, AEFG parallelogramma, erit DA ad AB, ut GA ad AE; quare reliqua DG erit ad reliquam
a. Cor. 19. 5. EB, ut GA ad AE [a]. eſt autem DG aequalis ipſi FH, EB ipſi HC, et AE ipſi GF. ergo ut FH ad HC, ita AG ad GF; et parallelae ſunt FH, HC ipſis AG, GF; et triangula AGF, FHC ad unum angulum compoſita ſunt in puncto F; quare erunt AF, FC ſibi ipſis in
b. 32. 6. directum [b].



Secundo, ſint parallelogramma KFHC, GFEA ſimilia et ſimiliter poſita, habeantque angulos KFH, EFG ad verticem oppoſitos; erunt diametri AF, FC ſibi ipſis in directum.

Quoniam enim parallelae ſunt AG, GF ipſis FH, HC; et eſt AG ad GF, ut FH ad HC; erunt AF, FC in directum [b].

PROP. XXXIII.

PROP. XXXIII. LIB. VI.

Verba "quippe qui ad centrum ſunt conſtituti" omiſſa ſunt, utpote imperiti cujuſdam additamentum.

In Graecis codicibus, et Latina verſione deeſt ἅ ἔτυχε, utcunque, in utriuſque partis demonſtratione, quae nunc adduntur, omnino enim ſunt neceſſaria. et in demonſtratione ſecundae partis, ubi ſc. triangulum BGC aequale oſtenditur triangulo CGK, verbum ἄρα omitti debet in textu Graeco.

PROPP. B, C. LIB. VI.

Propoſitiones hae Libro ſexto ſunt additae, quoniam a Geometris ſaepius uſurpantur.

DEF. IX, et XI. LIB. XI.

IN figuris planis ſimilitudo figurarum definitur ex aequalitate angulorum, et laterum circa aequales angulos proportionalitate; etenim ex ſola laterum proportionalitate, vel ſola angulorum aequalitate non ſequitur figuras eſſe ſimiles extra caſum triangulorum. et quidem ſimilis inter ſe poſitus rectarum linearum, quibus figurae continentur, partim ex utraque pendet. eademque ratione figurae ſolidae ſimiles ſunt eae quae et ſingulos angulos ſolidos aequales habent, et continentur figuris planis ſimilibus, multitudine aequalibus. ſunt enim quaedam figurae ſolidae, figuris planis ſimilibus, multitudine, quin et magnitudine aequalibus, contentae, quae neque ſimiles neque aequales ſunt, ut in Demonſtratione poſt Notas ad Def. 10. oſtendetur. neceſſe igitur fuit emendare Definitionem ſimilium figurarum ſolidarum, eique praemittere Defini-

tionem anguli ſolidi. Ex hiſce autem et Definitione decima, ſatis liquet quam multum ab imperitis depravati ſint hi Libri.

DEF. X. LIB. XI.

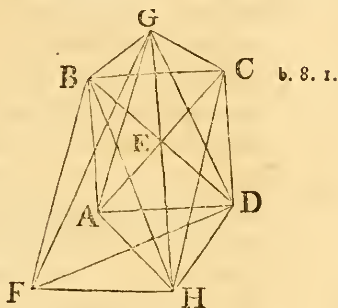
Quoniam ſenſus verbi "aequalis" notus eſt ante hanc Definitionem, igitur Propoſitio quae eſt Definitio decima hujus Libri eſt Theorema quod verum aut falſum eſſe demonſtrandum eſt, non aſſumendum; quare ex Propoſitione demonſtranda Theon aliuſve Editor inepte fecit hanc Definitionem figurarum ſolidarum ſimilium et aequalium. ſimiles enim eſſe figuras demonſtrandum eſt ex Definitione ſimilium ſolidarum figurarum; aequales autem eſſe oſtendendum eſt ex Axiomate, "Quae ſibi mutuo "congruunt inter ſe ſunt aequalia," vel ex Propoſitione A, vel Prop. 9. aut Prop. 14. Lib. 5. ex quo Axiomate, vel ex earum Propoſitionum aliqua, omnium omnino figurarum aequalitas ultimo demonſtranda venit. in praecedentibus Libris nullam aequalium figurarum Definitionem tradidit Euclides neque certe hanc dedit. quae enim dicitur Definitio prima, Lib. 3. revera eſt Theorema in quo aſſeritur eos circulos aequales eſſe quorum quae ex centris ſunt aequales, quod quidem ex Definitione circuli perſpicue apparet; ideoque a quodam inter Definitiones non proprie locatum eſt. non enim aequalitas figurarum definienda eſt ſed demonſtranda. Quamvis igitur verum eſſet figuras ſolidas, quae ſimilibus planis multitudine et magnitudine aequalibus continentur, inter ſe aequales eſſe, merito tamen culpandus eſt is qui ex hac Propoſitione demonſtranda Definitionem fecit. Quid autem dicendum, ſi haec Propoſitio non vera ſit? nonne confitendum eſt Geometras per mille tercentos annos in hac re Elementari deceptos fuiſſe? et ex hoc quidem modeſtiam diſcere debemus, atque agnoſcere quam parum nobis cavere poſſumus, quae eſt mentis humanae imbecillitas, ne in errores incidamus etiam in principiis ſcientiarum, quae inter maxime certas merito

rito aeſtimantur. Propoſitionem enim hanc minime ſemper veram eſſe variis exemplis oſtendi poteſt; ſufficit hoc quod ſequitur.

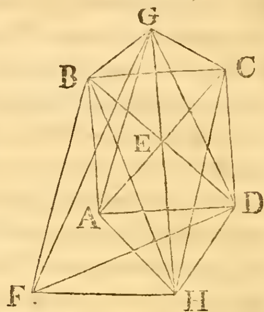
Sit quadratum ABCD et ducantur diametri AC, BD ſibi mutuo occurrentes in E; et ſuper unam ipſarum BD conſtituatur, in plano in quo eſt quadratum, triangulum iſoſceles BFD, a puncto vero E ad rectos angulos plano ABCD conſtituatur recta EG, et in ipſa ſumpto quovis puncto G, ducantur GA, GB, GC, GD, GF. in triangulis igitur AEG, CEG quoniam AE, EG aequales ſunt ipſis CE, EG, altera alteri, et rectos continent angulos, erit baſis AG baſi GC aequalis[a]. a. 4. 1.

quare in triangulis AGB, CGB aequales ſunt AG, GB ipſis CG, GB, et baſis AB aequalis eſt baſi BC; angulus igitur [b] AGB aequalis eſt angulo CGB, et triangulum AGB triangulo CGB aequale[a]. ſimiliter oſtendetur triangulum AGD aequale ipſi CGD. Producatur GE ad oppoſitas partes plani ABCD, et in ea ſumatur punctum quodvis H, et jungantur HA, HB, HC, HD, HF, et ſimiliter oſtendetur triangulum AHB aequale triangulo CHB, et triangulum AHD triangulo CHD. ſunt igitur duo ſolida quorum utrumque continetur octo triangulis; unum ſcilicet contentum quatuor triangulis quorum vertex communis eſt G, baſes vero rectae BA, AD, BF, FD; quatuorque triangulis quorum vertex communis eſt H, baſes vero eaedem rectae. alterum autem ſolidum contentum eſt quatuor triangulis quorum vertex communis eſt G, et baſes rectae BC, CD, BF, FD; et quatuor triangulis quorum vertex communis eſt H, et baſes eaedem rectae BC, CD, BF, FD. quatuor autem triangula AGB, AGD, AHB, AHD aequalia oſtenſa ſunt quatuor

b. 8. 1.



tuor triangulis CGB, CGD, CHB, CHD ſingula ſingulis; quatuor autem reliqua triangula BGF, DGF, BHF, DHF utrique ſolido communia ſunt. Duo igitur haec ſolida continentur planis ſimilibus, multitudine et magnitudine aequalibus. inaequalia autem eſſe manifeſtum eſt, cum primum eorum contineatur in altero. non igitur ſemper verum eſt aequalia eſſe ſolida quae planis ſimilibus, multitudine et magnitudine aequalibus continentur.



Cor. Hinc duo inaequales anguli ſolidi poſſunt contineri aequalibus et iiſdem multitudine angulis planis.

Angulus enim ſolidus ad G qui continetur quatuor angulis planis AGB, AGD, FGB, FGD inaequalis omnino eſt angulo ſolido ad idem punctum G qui continetur quatuor angulis planis CGB, CGD, FGB, FGD; hic enim priorem illum continet. uterque autem continetur quatuor angulis planis, qui inter ſe ſunt aequales ſinguli ſingulis vel iidem, ut oſtenſum fuit. et quidem innumeri poſſunt eſſe anguli ſolidi inaequales, qui aequalibus angulis planis ſinguli ſingulis continentur. Patet etiam figuras ſolidas prius memoratas minime ſimiles eſſe, quoniam earum anguli ſolidi non ſunt omnes inter ſe aequales.

Innumeros autem angulos ſolidos inter ſe inaequales poſſe contineri iiſdem angulis planis, eodem ordine poſitis, ope trium Propoſitionum ſequentium, manifeſtum erit.

PROP. I. PROBLEMA.

Datis tribus magnitudinibus A, B, C quartam invenire ita ut tres ſimul majores ſint reliquâ, quomodocunque ſumptae.

Sit

Sit D quarta, erit igitur D minor ipſis A, B, C ſimul. ſit A non minor utrâvis ex ipſis B, C; et primum ſint B, C ſimul non minores ipsâ A; erunt igitur B, C, D ſimul majores quam A. et quoniam A non minor eſt B, erunt A, C, D majores quam B. ſimiliter oſtendetur ipſas A, B, D ſimul majores eſſe quam C. Igitur in caſu quo B et C ſimul non minores ſunt ipsâ A, quaevis D quae minor eſt ipſis A, B, C ſimul, propoſitum efficiet.

Si vero B et C ſimul minores ſint quam A, quoniam requiritur ut B, C, D ſimul majores ſint A, ex hiſce ablatis B, C erit D major exceſſu ipſius A ſupra B, C ſimul. ſumatur igitur quaevis D quae minor ſit ipſis A, B, C ſimul, at major exceſſu ipſius A ſupra B, C ſimul. erunt igitur B, C, D ſimul majores quam A; et quoniam A major eſt utrâvis ex ipſis B, C, multo magis erit A una cum D, et alterutra ex ipſis B, C major reliqua. et, ex conſtructione, A, B, C ſimul majores ſunt quam D. Q. E. F.

Cor. Si praeterea requiratur ut A et B ſimul non minores ſint quam C et D ſimul, debet exceſſus ipſarum A et B ſimul ſupra C non minor eſſe quam D, hoc eſt debet D non major eſſe hoc exceſſu.

PROP. II. PROBLEMA.

Datis quatuor magnitudinibus A, B, C, D quarum A et B ſimul non minores ſunt quam C et D ſimul, et quarum tres ſimul majores ſunt reliquâ quartâ, quomodocunque ſumptae; quintam E invenire, ita ut duae ex tribus A, B, E quomodocunque ſumptae majores ſint reliqua tertia, et etiam duae ex tribus C, D, E quomodocunque ſumptae majores ſint reliquâ. ſit autem A non minor B, et C non minor D.

Primò ſit exceſſus ipſarum C, D non minor exceſſu ipſarum A, B. poteſt autem ſumi quaedam E quae minor eſt ſumma ipſarum C, D

at

at major exceſſu earundem; ſumatur, erit igitur E major exceſſu ipſarum A, B; quare B et E ſimul majores ſunt quam A; eſt autem A non minor B, ergo A et E ſimul majores ſunt B. et, ex hypotheſi, A una cum B, non minor eſt quam C una cum D, C autem cum D major eſt quam E, igitur et A una cum B major eſt quam E.

Sit autem exceſſus ipſarum A, B major exceſſu ipſarum C, D; et quoniam, ex hypotheſi, tres B, C, D ſimul majores ſunt quartâ A, erunt C et D ſimul majores exceſſu ipſarum A, B; igitur ſumi poteſt quaedam E quae minor eſt ipſis C et D ſimul, at major exceſſu ipſarum A, B. ſumatur, et quoniam E major eſt exceſſu ipſarum A, B, erunt B et E ſimul majores quam A. et, ut in praecedente caſu, oſtendetur A una cum E major B, et A una cum B major quam E. igitur in utroque caſu oſtenſum eſt duas ex ipſis A, B, E quomodocunque ſumptas, majores eſſe reliquâ.

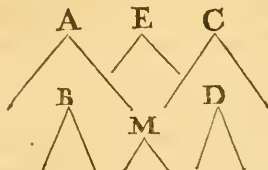
Et quoniam in utroque caſu E major eſt exceſſu ipſarum C, D, erit E una cum D major quam C; et, ex hypotheſi, C non minor eſt D, ergo E una cum C major erit quam D; eſt autem ex conſtructione C una cum D, major quam E. igitur ipſarum C, D, E duae quomodocunque ſumptae majores ſunt reliquâ. Q. E. F.

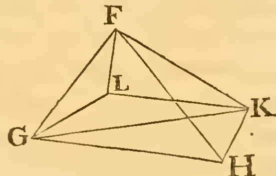
PROP. III. THEOREMA.

Fieri poteſt ut ex iiſdem quatuor angulis planis conſtituantur innumeri anguli ſolidi inter ſe inaequales.

Sumantur tres anguli plani A, B, C quorum A non minor ſit utrovis ex ipſis B, C; ſint autem A et B ſimul minores duobus rectis; et, ope Problematis 1. et Corollarii ejuſdem, inveniatur quartus angulus D, ita ut tres ex ipſis A, B, C, D majores ſint reliquo, quomodocunque ſumpti, et ut A et B ſimul non minores ſint ipſis C et D ſimul. ope vero Problematis 2. inveniatur quintus angulus E, ita ut duo ex angulis

lis A, B, E, reliquo ſint majores quomodocunque ſumpti, et etiam duo ex ipſis C, D, E quomodocunque ſumpti ſint majores reliquo. et quoniam A et B ſimul minores ſunt duobus rectis angulis, erunt A et B ſimul bis ſumpti minores quatuor rectis. ſunt autem A et B ſimul majores angulo E, quare A et B ſimul bis ſumpti majores erunt angulis A, B, E ſimul, qui propterea minores erunt quatuor rectis; et duo ex ipſis reliquo ſunt majores, quomodocunqe ſumpti; ergo ope Prop. 23. Lib. 11. conſtitui poteſt angulus ſolidus ex tribus angulis planis qui ipſis A, B, E, ſunt aequales. conſtituatur, ſitque angulus ſolidus ad F, contentus ſcilicet planis angulis GFH, HFK, GFK qui angulis A, B, E aequales ſunt, ſinguli ſingulis. et quoniam anguli C, D ſimul non

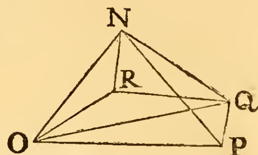




ſunt majores ipſis A, B ſimul, erunt C, D, E ſimul non majores angulis A, B, E ſimul. hi autem minores oſtenſi ſunt quatuor rectis, quare et C, D, E ſimul minores ſunt quatuor rectis; et duo ex ipſis reliquo ſunt majores, quomodocunque ſumpti; ergo ex tribus angulis planis ipſis C, D, E aequalibus conſtitui poteſt angulus ſolidus [23. 11.]. huic autem angulo ſolido conſtitui poteſt ad punctum F in recta FG angulus ſolidus aequalis, ope ſcilicet Prop. 26. Lib. 11. ſitque angulus GFK, qui ſc. aequalis eſt ipſi E, unus ex tribus angulis planis qui hunc angulum ſolidum continent, reliqui autem duo ſint KFL, GFL ipſis ſc. C, D aequales, alter alteri. Igitur ad punctum F conſtitutus eſt angulus ſolidus contentus quatuor angulis planis GFH, HFK, KFL, GFL qui ipſis A, B, C, D angulis ſunt aequales, ſinguli ſingulis.

 Rurſus

Rurſus inveniatur alter angulus M talis ut duo ex tribus angulis A, B, M reliquo ſint majores, quomodocunque ſumpti, et etiam duo ex tribus C, D, M quomodocunque ſumpti ſint majores reliquo. oſtendetur autem, ut in praemiſſis, angulos A, B, M ſimul minores eſſe quatuor rectis, anguloſque C, D, M ſimul minores eſſe quatuor rectis. Conſtituatur igitur [23. 11.] angulus ſolidus ad N contentus angulis planis ONP, PNQ, ONQ ipſis A, B, M aequalibus, ſinguli ſingulis, et ope Prop. 26. Lib. 11. conſtituatur ad idem punctum N in recta linea ON angulus ſolidus contentus tribus angulis planis, quorum unus ſit ipſe ONQ aequalis ſcilicet ipſi M, et reliqui duo QNR, ONR aequales ipſis C, D, alter alteri. erit igitur ad punctum N angulus ſolidus conſtitutus qui continetur



quatuor angulis planis ONP, PNQ, QNR, ONR ipſis A, B, C, D aequalibus, ſinguli ſingulis. ſolidos autem angulos, qui praedictis quatuor angulis planis ad F et N continentur, non eſſe inter ſe aequales, ſive non poſſe ſibi mutuo congruere, patet ex eo quod anguli GFK, ONQ ſive anguli E, M ex conſtructione ſint inaequales, et propterea rectae GF, FK non poſſunt congruere rectis ON, NQ. igitur neque anguli ſolidi ſibi mutuo congruent, et propterea inaequales ſunt.

Et quoniam ex tribus datis angulis A, B, C poſſunt innumeri anguli inveniri qui eadem efficiunt cum angulo D, et rurſus ex ipſis A, B, C et D, vel uno quovis ex hiſce innumeris, inveniri poſſunt alii qui eadem praeſtant cum angulis E vel M, innumeri alii ſolidi anguli conſtitui poſſunt qui iiſdem quatuor angulis planis continentur, qui omnes inter ſe ſunt inaequales. Q. E. D.

Falluntur igitur Clavius aliique auctores qui aſſerunt ſolidos angulos qui aequalibus et iiſdem numero planis angulis continentur inter ſe

aequales

aequales esse. patet etiam Propositionem 26. Lib. 11. non legitime demonstratam esse, in ea enim aequalitas solidorum angulorum qui tribus angulis planis aequalibus, singuli singulis, continentur, assumitur, non demonstratur.

PROP. I. LIB. XI.

Verba in fine hujus, "recta enim linea cum recta linea non convenit in pluribus punctis quam uno, alias rectae lineae sibi ipsis congruent." omissa sunt tanquam imperiti cujusdam additamentum. demonstrandum enim hoc fuit non assumendum.

PROP. II. LIB. XI.

Propositio haec a quodam mutata et vitiata videtur. Etenim secunda pars Enuntiationis, viz. "et omne triangulum in uno plano consistit" demonstratione non indiget; nam omnes figurae in primo Libro Elementorum definitae, sunt, ex hypothesi, figurae planae, hoc est, in plano descriptae, et inter caeteras triangulum. et quidem potest superficies convexa tribus rectis lineis terminari. neque valet demonstratio ad ostendendum duas rectas se invicem secantes in uno esse plano. debet igitur ostendi duas aut tres rectas sibi mutuo occurrentes in uno plano esse. ut hoc fieret Enuntiationem et Demonstrationem in eas quae in textu positae sunt mutavimus.

PROP. III. LIB. XI.

In hac prope finem habentur, "non igitur DEB, DFB rectae lineae sunt, similiter ostendemus neque aliam quampiam, quae a puncto D ad B ducitur rectam esse," quae omissa sunt. ex eo enim quod duae lineae spatium comprehendunt, tantum sequitur unam ex ipsis non esse rectam. et vis argumenti ex hoc pendet, si scilicet communis sec-

tio planorum non ponatur eſſe recta linea, duae rectae lineae ſpatium comprehendent, quod eſt abſurdum; ergo communis ſectio eſt recta linea.

PROP. IV. LIB. XI.

" Et triangulum AED triangulo BEC aequale," haec etiam omiſſa ſunt; ſaepius enim integra haec concluſio in praecedentibus libris repetita fuit, ut non neceſſe ſit idem in hoc libro facere.

PROP. V. LIB. XI.

In hac prope finem delenda eſt vox ἐπιπέδῳ in textu Graeco, utpote imperiti additamentum. et recte omiſſa eſt vox "plano" in verſionis Commandini editione Oxonienſi.

PROP. VII. LIB. XI.

Manifeſtum eſt Propoſitionem hanc ab Editore quodam minus perito additam fuiſſe. rectae enim lineae quae ab uno puncto ad aliud, in quovis plano, ducuntur in praecedentibus libris, in eo ponuntur eſſe plano. et niſi eſſent, demonſtrationes quaedam in quibus una recta alteri occurrere ponitur, nullae eſſent; non enim occurrerent rectae. Ex. gr. in Prop. 30. Lib. 1. recta GK non occurreret ipſi EF, ſi non eſſet GK in plano in quo ſunt parallelae AB, CD, in quo etiam, ex hypotheſi, eſt recta EF. praeterea demonſtratur haec ſeptima ope praecedentis tertiae, in qua bis id ipſum aſſumitur quod in ſeptima demonſtrandum proponitur, rectam ſcilicet ab uno puncto ad aliud in quolibet plano ductam, in eo eſſe plano; idem etiam aſſumitur in praecedente Prop. 6. nam recta BD quae jungit puncta B, D in ſubjecto plano, in eo ponitur eſſe plano. locum autem dedimus ſeptimae, mutata Demonſtratione,

ſtratione, ut numerus Propoſitionum ſervaretur; manifeſta enim eſt ex Def. 7. et 35. Lib. 1. quamvis Elementis non ineſſet.

PROP. VIII. LIB. XI.

In hac prope finem, in Graecis, et in Commandini et Gregorii verſionibus habentur, "at in plano per BA, AD eſt DC," vice quorum verſionis Commandini Oxonienſis Editio recte habet "at in plano per BD, DA eſt DC." ſequentia autem quae in omnibus Editionibus leguntur, viz. "quoniam in plano per BD, DA ſunt AB, BD; in quo "autem ſunt AB, BD in eodem eſt ipſa DC," corrupta ſunt, vel a quodam textui inſerta; nulla enim neceſſitas fuit per iſtas ambages oſtendere rectam DC in eodem eſſe plano in quo ſunt BD, DA, cum immediate ſequatur ex Prop. 7. praecedente rectas BD, DA eſſe in plano in quo ſunt parallelae AB, CD. hiſce igitur omiſſis, legendum eſt, "omnes enim tres ſunt in plano in quo ſunt parallelae AB, CD."

PROP. XV. LIB. XI.

Poſt verba, "et quoniam BA parallela eſt AH," addita ſunt haec, "utraque enim ipſarum parallela eſt ipſi DE non in eodem cum ipsâ "plano," utpote manifeſte omiſſa.

PROP. XVI. LIB. XI.

In hac prope finem vice verborum, "quae autem neutra ex parte "conveniunt," legendum eſt, "quae autem in eodem plano productae, "neutrâ" &c. etenim in citando hanc Definitionem in Prop. 27. Lib. 1. non neceſſe fuit addere voces, "in eodem plano," quoniam omnes rectae de quibus agitur in libris praecedentibus ſunt in eodem plano. hic autem omnino fuit neceſſarium.

PROP. XX. LIB. XI.

In hac prope initium habetur "ſin minus, ſit major BAC." poteſt autem angulus BAC aequalis eſſe alteri reliquorum. legendum igitur "ſin minus, ſit angulus BAC non minor utrovis reliquorum, major "autem quam DAB."

Et ad finem hujus legitur, "ſimiliter demonſtrabimus," cum nulla demonſtratione opus ſit; quoniam enim angulus BAC non minor ſit utrovis reliquorum, patet BAC una cum altero ex ipſis reliquo majorem eſſe.

PROP. XXII. LIB. XI.

Et in hac legitur prope initium, "ſin minus, ſint inaequales anguli "ad B, E, H, et major ſit angulus ad B utrovis ipſorum qui ſunt ad "E, H." haec manifeſte vitiata ſunt, poterit enim angulus ad B aequalis eſſe uni reliquorum. legendum igitur eſt "ſin minus, ſint inaequales "anguli ad B, E, H, et ſit angulus ad B non minor utrovis ipſorum ad "E, H. non igitur minor eſt recta AC utravis ipſarum DF, GK."

PROP. XXIII. LIB. XI.

Demonſtratio hujus paulo brevior reddita eſt, omittendo in caſu tertio ea quae prius oſtenſa fuerunt in primo; et adhibendo conſtructionem quam Campanus tradit, qui tamen Caſum 2. et 3. non demonſtrat. hujus autem tertii conſtructio et Demonſtratio ſimpliciores paulo quam in textu Graeco factae ſunt.

PROP. XXIV. LIB. XI.

Verbum "ſimilia" Enuntiationi hujus additum eſt, quoniam plana quibus continentur ſolida quae in Prop. 25. aequalia inter ſe oſtendenda

denda ſunt, ſimilia debent eſſe et aequalia; ut aequalitas ſolidorum ex Prop. C. Lib. 11. inferatur. et quidem in Editione Oxonienſi Corollarium adjectum eſt Prop. 24^{tae}, oſtendens parallelogramma, de quibus agitur in hac Propoſitione, ſimilia eſſe, ut ſolidorum aequalitas in Prop. 25. ex Def. 10. Lib. 11. oſtendatur.

PROP. XXV, et XXVI. LIB. XI.

In Propoſitione 25ta figurae ſolidae quae continentur planis ſimilibus, multitudine et magnitudine aequalibus, inter ſe aequales ponuntur. et videtur Theonem aut alium quendam ut taedium effugeret demonſtrandi figuras de quibus agitur in hac Propoſitione aequales eſſe, Definitionem decimam hujus Libri poſuiſſe vice demonſtrationis; quod quidem inſcite admodum factum eſt.

Similiter, in Propoſitione 26ta duo anguli ſolidi aequales eſſe ponuntur, ſi uterque contineatur tribus angulis planis qui, ſinguli ſingulis, inter ſe ſunt aequales. et ſatis mirum eſt nullum, quantum ſcio, ex Euclidis interpretibus vidiſſe aliquid duabus hiſce Propoſitionibus deeſſe. Clavius quidem ad Def. 11. hujus Libri aſſerit, "perſpicuum eſſe angulos ſolidos, qui angulis planis multitudine et magnitudine aequalibus continentur ſibi mutuo aequales eſſe, nam congruent ſi ſeſe penetrare intelligantur;" ſed hoc ſine ulla ratione aſſeritur, neque ſemper verum eſt extra caſum in quo anguli ſolidi tribus tantum angulis planis continentur quorum ſinguli ſingulis ſunt aequales. et in hoc caſu idem eſt ac aſſerere duo triangula ſphaerica inter ſe aequilatera, eſſe etiam inter ſe aequiangula, et ſibi mutuo congruere; quod ſine demonſtratione concedi minime debet. Certe Euclides hoc non aſſumpſit de triangulis rectilineis; oſtendit enim in Propoſitione 8va, Lib. 1. triangula inter ſe aequilatera, eſſe inter ſe aequiangula, unde ipſorum aequalitas ex Prop. 4ta ejuſdem Libri manifeſta eſt. et Menelaus, in Prop. 4ta,

Lib. 1.

Lib. 1. Sphaericorum, explicite demonſtrat triangula ſphaerica inter ſe aequilatera eſſe etiam inter ſe aequiangula; unde et ſibi mutuo congruere facile oſtendi poteſt, ſi ſcilicet eorum latera eodem ordine et ſitu diſpoſita fuerint.

Ad defectus igitur hos ſupplendos neceſſarium fuit tres Propoſitiones A, B, C huic Libro inſerere. Propoſitiones enim 25ti, 26ta, et 28va, et propterea octo aliae hujus Libri quae ex iis pendent, viz. 27. 31. 32. 33. 34. 36. 37. et 40. infirmo omnino hactenus innitebantur fundamento; ut et Prop. 8. 12. Cor. 17. et Prop. 18. Lib. 12. quae pendent ex Definitione 9na. figuras enim ſolidas quae planis ſimilibus, multitudine et magnitudine aequalibus continentur, ut et angulos ſolidos qui aequalibus et iiſdem numero planis angulis continentur, non ſemper inter ſe aequales eſſe, oſtenſum eſt in Notis ad Def. 10. hujus Libri.

Obſervandum eſt Andream Tacquet in Euclide ſuo definire angulos ſolidos aequales eſſe, "qui intra invicem poſiti congruunt." Propoſitio autem haec non eſt Definitio ſed Axioma; vera enim eſt de magnitudinibus quibuſcunque. poſuit autem Definitionem hanc inutilem ut ope ejus demonſtraret Prop. 36. hujus Libri ſine ope Prop. 35. ejuſdem. de qua demonſtratione vide Notam ad Prop. 36.

PROP. XXVIII. LIB. XI.

In hac oſtendi debuit diagonales eſſe in uno plano, non aſſumi. defectum hunc ſupplevit Clavius.

PROP. XXIX. LIB. XI.

Hujus Propoſitionis tres ſunt caſus; primus ſcilicet in quo duo parallelogramma baſi AB oppoſita latus habent commune; ſecundus in quo parallelogramma haec a ſe invicem ſeparata ſunt, et tertius in quo habent

bent partem communem; et huic ſoli demonſtratio quae hactenus habetur inſervit. Primus autem immediate oſtenditur ex praecedente Propoſitione 28va, quae quidem huic in hunc finem praemiſſa videtur; etenim nulli praeter ei et 40mae hujus Libri utilis eſt, quarum ultimae praemiſſa certe fuiſſet, ſi in hac 29na Euclides eam non adhibuiſſet. Hunc autem caſum imperitus quidam ex Elementis delevit, et mutilavit Euclideam reliquorum caſuum demonſtrationem quam nunc reſtituimus, quaeque iis ſimul oſtendendis inſervit.

PROP. XXX. LIB. XI.

In demonſtratione hujus, plana oppoſita ſolidi CP in figura noſtra, hoc eſt ſolidi CO in figura Commandini, non oſtenduntur inter ſe parallela; quod Tyronum gratia viſum eſt oſtendere.

PROP. XXXI. LIB. XI.

Hujus Propoſitionis duo ſunt caſus; primus in quo rectae inſiſtentes ad rectos angulos ſunt baſibus; alter in quo non ſunt. primus rurſus dividitur in alios duos, quorum alter eſt is in quo baſes ſunt parallelogramma inter ſe aequiangula; reliquus in quo non ſunt aequiangula. illius textus Graeci Editor mentionem non facit, demonſtrationem autem ejus demonſtrationi reliqui caſus intexuit. quare Corollarium hoc oſtendens addidiſſe debuit. ſatius autem viſum eſt caſus hos diſtincte tradere. brevior etiam reddita eſt demonſtratio, viam ſequendo qua uſus eſt Euclides in Prop. 14. Lib. 6. Praeterea in demonſtratione caſus in quo rectae inſiſtentes non ſunt ad rectos angulos baſibus, non oſtendit Editor ſolida in conſtructione deſcripta eſſe parallelepipeda; quod quidem Euclidem omiſiſſe minime putandum eſt. Verba autem

ad finem Propositionis, "quorum insistentes non sunt in iisdem rectis "lineis," ab imperito quodam addita sunt; nam possunt esse in iisdem rectis lineis.

PROP. XXXII. LIB. XI.

Omisit Editor jubere parallelogrammum FH applicari in angulo FGH aequali angulo LCG, quod quidem necessarium est; unde recte hoc supplevit Clavius.

Praeterea in constructione requiritur ut a basi FH, eadem altitudine ipsi CD, solidum parallelepipedum GK compleatur; verum innumera possunt esse solida quae eandem habent basim, et eandem altitudinem. scribendum igitur est "et compleatur solidum parallelepipedum GK cu-"jus basis sit FH, et una ex rectis insistentibus sit FD." eademque correctio facienda est in Propositione 33.

PROP. D. LIB. XI.

Verisimile admodum est Euclidem huic Propositioni locum in Elementis dedisse, qui similem de parallelogrammis aequiangulis tradit in Prop. 23. Lib. 6.

PROP. XXXIV. LIB. XI.

In hac ter habentur haec verba, *ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν*, "quorum insistentes non sunt in eisdem rectis lineis;" quae vel omnino sunt omittenda, ut factum est a Clavio, vel, ipsorum vice, scribenda sunt, "sive insistentes rectae sint in eisdem rectis lineis, "*sive* non sint," inepte enim excluditur alter casus.

Et bis habentur *ὧν τὰ ὕψη*, "quorum altitudines," manifesto errore, vice *ὧν αἱ ἐφεστῶσαι*, "quorum insistentes." altitudo enim semper est ad rectos angulos basi.

PROP. XXXV.

PROP. XXXV. LIB. XI.

In hac breviori via quam in textu Graeco anguli ABH, DEM recti ostenduntur; et similiter ostendetur rectos esse ACH, DFM. repetitio autem ejusdem Demonstrationis quae in textu habetur omissa est. verisimile enim est eam a quodam Editore textui additam fuisse, ut ex verbis, "similiter demonstrabimus" conjicere licet; ea enim non solent addi nisi quando Demonstratio non traditur, aut, si tradita sit, in quibusdam differt a praecedente Demonstratione, ut in 26. hujus Libri. Campanus autem non habet hanc repetitionem.

Aliam Corollarii hujus Propositionis Demonstrationem dedimus, cujus ope Propositio 36. quae sequitur, demonstratur sine Prop. 35.

PROP. XXXVI. LIB. XI.

Andreas Tacquet in Euclide suo hanc Propositionem sine ope Prop. 35. demonstrat. patet autem solida quae aequiangula dicuntur, in enuntiatione Propositionis 36. ut nunc habetur in textu Graeco, ea esse quorum anguli solidi tribus angulis planis inter se aequalibus, singuli singulis, et similiter positis, continentur; ut ex constructione manifestum est. hos autem angulos solidos sibi mutuo congruere assumit, non demonstrat Tacquetus; ponit enim ille solida jam facta esse, non ostendit quomodo construantur, ut in textu Graeco factum est. ope autem secundae Demonstrationis praecedentis Corollarii, Demonstratio ejus in hac etiam quae in textu habetur hypothesi legitima redditur.

PROP. XXXVII. LIB. XI.

In hac assumitur rationes triplicatas rationum quae inter se eaedem sunt, esse inter se easdem, ut et rationes easdem esse inter se quarum rationes triplicatae sunt inter se eaedem; quod sine Demonstratione mi-

nime concedendum est; certe Euclides harum Propositionum primam et faciliorem non assumpsit, sed demonstravit in casu rationis duplicatae, in Prop. 22. Lib. 6. alia igitur Demonstratio tradita est similis ei quae habetur in ea Propositione, ut Clavius prius fecerat.

PROP. XXXVIII. LIB. XI.

Si a puncto in plano aliquo quod alteri plano ad rectos est angulos, ducenda sit, ad planum hoc, recta perpendicularis; fiet, ducendo ad communem planorum sectionem perpendicularem a puncto illo; erit enim haec perpendicularis ad planum subjectum, vi Definitionis 4. Libri hujus. ineptum enim esset, in hoc casu, uti Propositione 11[ma] hu-
* 17: 12. jus. sed Euclides*, Apollonius aliique Geometrae jubent perpendicularem duci a puncto ad planum subjectum, et concludunt eam cadere in communem planorum sectionem; quod hoc idem sit ac si praedicta constructione uterentur, et concluderent rectam ductam perpendicularem esse ad planum subjectum; aliquis autem hoc non videns, putavit necessarium fuisse Propositionem hanc huic Libro addere, cujus quidem nullus est usus.

PROP. XXXIX. LIB. XI.

In hac rectae lineae quae bifariam secant opposita plana parallelepipedi, in uno ponuntur esse plano, quod quidem demonstrari debuit; ut nunc factum est.

LIB. XII.

EX Epistola Archimedis ad Dositheum libris de Sphaera et Cylindro praemissa, quam integritati suae ex Manuscriptis restituit Doctissimus Collega meus Dom. Jacobus Moor Graecarum literarum Professor

ſeſſor apparet, ipſo me monente, Eudoxum auctorem fuiſſe praecipuarum Propoſitionum quae in hoc Libro continentur.

PROP. II. LIB. XII.

Ad initium hujus habentur haec "ſi enim non ita ſit, erit ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita circulus ABCD vel ad ſpatium aliquod minus circulo EFGH, vel ad majus." et ſimilia rurſus occurrunt prope finem hujus Propoſitionis, ut et in Propp. 5. 11. 12. 18. hujus Libri. de quibus obſervandum eſt, demonſtrationi Theorematis ſufficere, in hiſce et ſimilibus caſibus, ut res quaedam poſſit exiſtere, dummodo hoc perſpicuum fuerit, quamvis non poſſit eadem Geometrice inveniri ſeu exhiberi. ita hic aſſumitur quartam exiſtere poſſe proportionalem tribus magnitudinibus, viz. duobus quadratis ex BD, FH et circulo ABCD, quoniam ſcilicet perſpicuum eſt eſſe quadratum aliquod aequale circulo ABCD, quamvis illud Geometrice inveniri non poteſt; tribus autem figuris rectilineis quadratis ſcilicet ex BD, FH, et quadrato quod circulo ABCD aequale eſt, exiſtit quartum proportionale quadratum; nam tribus rectis lineis quae ipſorum ſunt latera exiſtit quarta proportionalis recta[a]. et ſpatium quarto huic quadrato aequale illud eſt quod in hac Propoſitione deſignatur litera S. ſimile autem intelligendum eſt in reliquis Propoſitionibus citatis; et veriſimile eſt haec oſtenſa fuiſſe ab Euclide, et a quodam Editore ex textu deleta. Lemma enim quod huic Propoſitioni ab imperito quodam ſubjungitur huic rei explicandae minime inſervit.

a. 12. 6.

PROP. III. LIB. XII.

In textu Graeco et verſionibus ſequentia habentur, viz. "Et cum duae rectae lineae ſeſe tangentes BA, AC" &c. hic anguli BAC, KHL ope Prop. 10. Lib. 11. aequales oſtenduntur, quod prius factum

tum fuit. triangulum enim EAG ſimile oſtenſum fuit ipſi KHL. repetitio igitur haec omiſſa eſt, et triangula ABC, HKL ſimilia eſſe, brevius ope Prop. 21. Lib. 6. oſtenduntur.

PROP. IV. LIB. XII.

Pauca in hac magis explicite quam in textu Graeco tradita ſunt.

PROP. V. LIB. XII.

In hac prope finem habentur verba ὡς ἔμπροσθεν ἐδείχθη, "ut antea oſtenſum fuit;" quae rurſus occurrunt ad finem Propoſitionis 18. hujus Libri; nullibi tamen, niſi forſan hiſce verbis citetur Lemma inutile annexum Propoſitioni 2^{dae}, in hiſce Elementis hoc oſtenſum eſt, et forſan ab imperito Editore omiſſa ſunt, qui oblitus eſt delere etiam has voces.

PROP. VI. LIB. XII.

Breviorem hujus Demonſtrationem dedimus. et quae nunc in textu Graeco habetur paulo brevior poteſt reddi. imperite enim ejus auctor ad finem ejus bis utitur Propoſitione 22. Lib. 5. quaſi ea non de quotcunque magnitudinibus, ſed tantum de tribus, quae totidem aliis, binae ſumptae ſunt proportionales, intelligenda ſit.

COR. PROP. VIII. LIB. XII.

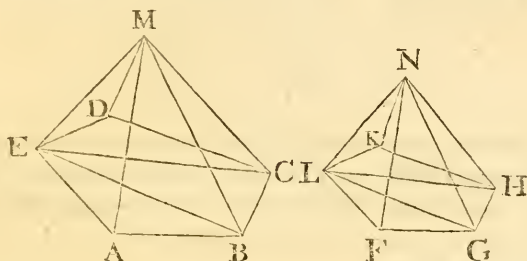
Demonſtratio hujus imperfecta eſt, etenim pyramides in quas eae dividuntur quae habent multangulas baſes, non oſtenduntur inter ſe ſimiles, quod neceſſario fieri debuit, et in ſimili caſu factum eſt in Prop. 12. hujus Libri. plena Demonſtratio eſt ut ſequitur,

Sint ſimiles et ſimiliter poſitae pyramides, quarum baſes quidem polygona ABCDE, FGHKL, vertices autem M, N puncta. habebit py-

ramis

ramis ABCDEM ad pyramidem FGHKLN triplicatam rationem ejus quam habet latus AB ad homologum latus FG.

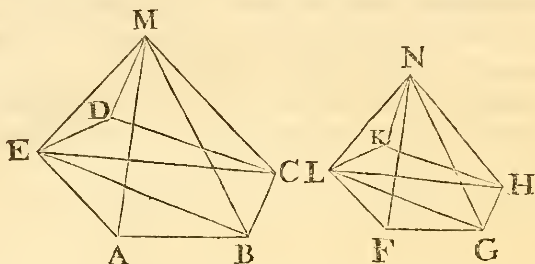
Dividantur enim polygona in triangula ABE, EBC, ECD, FGL, LGH, LHK, quae inter se similia erunt, singula singulis[a]. quoniam a. 20. 6. vero pyramides sunt similes, erit [b] triangulum EAM simile triangulo b. 11. Def. 11. LFM, et triangulum ABM ipsi FGN. est igitur [c] ME ad EA, ut NL c. 4. 6. ad LF; ut vero AE ad EB, ita est FL ad LG, quia similia sunt EAB, LFG triangula; ergo ex aequali ut ME ad EB, ita est NL ad LG. similiter ostendetur EB ad BM, ut LG ad GN; rursus igitur, ex aequali, ut EM ad MB, ita est LN ad NG. triangulorum igitur EMB,



LNG proportionalia sunt latera, quare aequiangula [d] sunt EMB, LNG d. 5. 6. triangula, et inter se similia. pyramides igitur quarum bases EAB, LFG triangula, et vertices M, N sunt inter se similes, ipsarum enim anguli solidi sunt aequales[e], et continentur similibus planis multitudine ae- e. B. 11. qualibus. eadem ratione pyramis EBCM similis ostendetur pyramidi LGHN, et pyramis ECDM ipsi LHKN. et quoniam pyramis EABM similis est pyramidi LFGN, et triangulares habent bases, habebit pyramis EABM ad ipsam LFGN, triplicatam rationem ejus quam habet EB ad latus homologum LG; eadem ratione, et pyramis EBCM ad pyramidem LGHN habet triplicatam rationem ejus quam habet EB

ad

ad LG. ut igitur pyramis EABM ad pyramidem LFGN, ita pyramis EBCM ad pyramidem LGHN. eadem ratione, erit ut pyramis EBCM ad ipſam LGHN, ita pyramis ECDN ad LHKN pyramidem. et ut unum antecedentium ad unum conſequentium, ita omnia antecedentia ad omnia conſequentia. eſt igitur, ut pyramis EABM ad pyramidem



LFGN, ita tota pyramis ABCDEM ad totam pyramidem FGHKLN. Pyramis autem EABM ad pyramidem LFGN triplicatam rationem habet ejus quam habet AB ad FG, igitur et tota pyramis habet ad totam pyramidem triplicatam rationem quam habet AB ad homologum latus FG. Q. E. D.

PROP. XI, et XII. LIB. XII.

Ordo literarum Alphabeti, contra morem Euclidis, non ſervatur in figuris harum Propoſitionum, quem igitur reſtituimus. unde et prima pars Prop. 12^{mae} iiſdem verbis quibus prima pars Prop. 11^{mae}, oſtendi poteſt. omiſſa igitur eſt demonſtratio ejus partis, et ex Prop. 11ma aſſumpta.

Demonſtrationes Prop. 10. et 11. a diverſis auctoribus factae videntur. Etenim in Prop. 10. pyramis ſuper quadratum circulo inſcriptum dimidium oſtenditur ejus quae ſuper quadratum circumſcriptum erecta

erecta eſt, ope priſmatum ſuper eaſdem baſes; in Propoſitione autem 11. id ipſum brevius oſtenditur ope Prop. 6. hujus.

PROP. XIII. LIB. XII.

In hac Propoſitione communis ſectio plani baſibus cylindri paralleli, et ipſius cylindri circulus eſſe ponitur, viſum igitur eſt hoc breviter oſtendere; unde ſatis liquet planum illud cylindrum in duos alios dividere. idem autem et in Prop. 14ta ſuppleri intelligendum eſt. Verbum etiam "utcunque" omiſſum prope finem Prop. 13. nunc additum eſt.

PROP. XV. LIB. XII.

"Et compleantur cylindri AX, EO." Cylindros aeque ac conos ut jam factos enuntiatio et expoſitio Propoſitionis exhibent. quare potius legendum "et ſint coni quidem ALC, ENG; cylindri vero AX, EO."

Deeſt caſus primus in ſecunda parte demonſtrationis; quaedam etiam deſunt in caſu ſecundo ejuſdem, ante verba "iiſdem enim conſtructis" quae nunc addita ſunt.

PROP. XVII. LIB. XII.

Verba in textu Graeco in Enuntiatione hujus Propoſitionis, viz. εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον ἐγγράψαι, μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, ita vertuntur a Commandino aliiſque interpretibus "in majori ſolidum polyedrum deſcribere quod "minoris ſphaerae ſuperficiem non tangat." referunt ſcilicet verba κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν ad proxima verba τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. minime autem ita verti debent, ſolidum enim polyedrum non ſolum ſuperficiem minoris ſphaerae ſed et totam ſphaeram minorem attingit et pervadit.

referenda igitur ſunt ea verba ad τὸ ϛερεὸν πολύεδρον, et vertenda "in ma-"jori ſphaera ſolidum polyedrum deſcribere cujus ſuperficies ſphaeram "minorem non attingat;" ut ſenſus Propoſitionis neceſſario requirit.

Demonſtratio autem Propoſitionis depravata eſt et mutila. Etenim quae facilia ſunt explicite admodum oſtenduntur, quae vero minus obvia, explicatione deſtituuntur; ut cum aſſeritur quadratum ex KB majus eſſe quam duplum quadrati ex BZ, in prima demonſtratione; et angulum BZK obtuſum eſſe in ſecunda; quae quidem demonſtrari debuerunt. praeterea in prima demonſtratione habetur "ducatur a puncto K ad "BD perpendicularis KΩ" cum dicendum fuit "jungatur KV," quae oſtendenda fuit perpendicularis ad BD. manifeſtum enim eſt ex figura in Hervagii et Gregorii editionibus, et ex ipſo textu, Editorem textus Graeci quem nunc habemus non vidiſſe perpendicularem a puncto K ad BD ductam neceſſario incidere in ipſum punctum V, incidit enim in punctum Ω diverſum a V in eorum figuris; et in demonſtratione ponuntur ea puncta tanquam diverſa, nam diverſis literis V et Ω notantur. Videtur autem Commandinum hoc vidiſſe, nam in ejus figura unum idemque punctum notatur duabus literis V, Ω. ſed et ante Commandinum vir doctus Joannes Dee in Commentariis quae huic Propoſitioni ſubjunxit in verſione Anglica Elementorum ab Henrico Billingſley facta, Londini A. D. 1570 impreſſa, errorem hunc explicite notat, et demonſtrationem conſtructioni quae in textu Graeco habetur convenientem tradit, quâ ſcilicet oſtendit perpendicularem a puncto K ad BD ductam, neceſſario cadere in V.

Praeterea quadrilatera SOPT, TPRY et triangulum YRX minime oſtenduntur non attingere ſphaeram minorem, quod neceſſarium fuit demonſtrare. ſolus Clavius, quantum ſcio, hoc obſervavit et Lemmate demonſtravit, quod paulo aliter et brevius oſtenſum Propoſitioni huic praemiſſum eſt.

In

In Corollario hujus Propositionis, positum est descriptum esse in altera sphaera solidum polyedrum simile ei quod in sphaera BCDE descriptum fuit. verum cum constructio qua in altera sphaera polyedrum describi potest non tradita sit, satius putavimus eam exhibere, et demonstrare similitudinem pyramidum in hoc polyedro, pyramidibus ejusdem ordinis in polyedro solido in sphaera BCDE.

Ex praecedentibus satis liquet quam ab imperitis Editoribus vitiata et mutilata fuerint Euclidis accuratissimi Geometrae Elementa. Opinio autem quam plerique viri docti habuerunt de Editione Graeca quae nunc extat, eam scilicet nihil aut parum differre a vero ipsius Euclidis opere, eos sine dubio fefellit, minusque accuratos in Editione hac examinanda reddidit; quo factum est ut a Theonis tempore hactenus, errores quosdam, satis licet crassos non perspexerint. Sperare igitur licet operam quam in eisdem corrigendis et libris hisce emaculandis posuimus, non futuram fore ingratam aequis rerum aestimatoribus, qui Demonstrationes legitimas ab iis quae non sunt discernere valent.

F I N I S.

E R R A T A.

Pag. 14. linea 5. post ABC; adde, et producantur AC, AD ad puncta E, F;
P. 322. l. ult. dele, superficiei
P. 324. l. 2. DUABUS, lege, DUOBUS
P. 348. l. 4. a fine, Apogogicas, lege, Apagogicas
P. 408. l. 3. ECDN, lege, ECDM



